

Voorwoord

De analyse van functies van één reële variabele wordt in dit boek voortgezet naar de analyse van functies van meerdere reële variabelen en naar de analyse van functies van één complexe variabele. De eerste vier hoofdstukken behandelen de lineaire algebra die hierbij nodig is.

De hoofdstukken 5 t/m 10 gaan over limieten, continuïteit en differentieerbaarheid van \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^m -functies, d.w.z. functies met een domein in \mathbb{R}^n en een bereik in \mathbb{R}^m . Speciale aandacht krijgen de continu differentieerbare en liefst ook nog reguliere functies. Belangrijke stellingen als de inverse functiestelling en de impliciete functiestelling worden bewezen. Verder behandelen we integralen $\int_V f$ met integratie-

domein $V \subset \mathbb{R}^n$ en een \mathbb{R}^n - \mathbb{R} -functie f als integrand, waarbij we ons beperken tot Riemann-integralen over een integratiedomein, dat meetbaar is in de zin van Jordan. Door ook aan de integrand f nog enkele eisen te stellen is het mogelijk om een begrijpelijk en wiskundig correct bewijs van de transformatiestelling voor integralen te geven. Op een logische manier volgen daarna integralen over krommen en oppervlakken.

\mathbb{C} is het lichaam van de complexe getallen. We stellen ons \mathbb{C} voor als een plat vlak. In de laatste vijf hoofdstukken worden de eigenschappen van \mathbb{C} - \mathbb{C} -functies (met domein en bereik in \mathbb{C}) behandeld. De aandacht gaat vooral uit naar holomorfe functies. Dat zijn functies die complex differentieerbaar zijn op een open deelverzameling van \mathbb{C} . Belangrijk hulpmiddel bij het bestuderen van deze functies zijn de integralen over een kromme in het complexe vlak \mathbb{C} . In hoofdstuk 11 worden krommen in \mathbb{R}^2 uitvoerig bestudeerd. Punt (x, y) in \mathbb{R}^2 correspondeert met het complexe getal $z = x + i \cdot y$. De resultaten uit hoofdstuk 11 zijn eenvoudig te vertalen naar krommen in \mathbb{C} . Een kromme in \mathbb{C} is een continue \mathbb{R} - \mathbb{C} -afbeelding met een interval $I \subset \mathbb{R}$ als parameterdomein. We hebben geen andere dan stuksgewijs reguliere krommen nodig. Voor zulke krommen kunnen we een betrekkelijk eenvoudig bewijs van de Jordankrommestelling geven. Holomorfe functies hebben interessante eigenschappen die vaak ontbreken bij differentieerbare \mathbb{R} - \mathbb{R} -functies. Veel bekende \mathbb{R} - \mathbb{R} -functies kunnen op precies één manier uitgebreid worden tot holomorfe \mathbb{C} - \mathbb{C} -functies. De eigenschappen van deze uitbreidingen laten soms opmerkelijke verbanden zien tussen de oorspronkelijke \mathbb{R} - \mathbb{R} -functies. Verrassend is bijvoorbeeld de manier waarop de complexe sinus en cosinus blijken samen te hangen met de exponentiële functie. Een holomorfe functie is oneindig vaak differentieerbaar. Een functie f die holomorf is binnen een cirkel met middelpunt c wordt daar gerepresenteerd door zijn Taylorreeks $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - c)^k$ met $a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}$.

We richten ons meer op de theorie dan op praktisch rekenwerk en concrete toepassingen. Door niet de grootst mogelijke algemeenheid na te streven en ons te beperken tot de hoofdzaken, zijn we in staat m.b.t. de stof die wel aan de orde komt redelijk volledig te zijn, met name in het bewijzen van de gebruikte stellingen. Om bepaalde hoofdstukken minder afhankelijk te maken van voorafgaande stof bevatten sommige hoofdstukken enige overlap met eerdere hoofdstukken.

Dit boek kan gebruikt worden als een vervolgdeel bij mijn eerder verschenen *Analyse + Meetkunde*, maar dat hoeft niet. Het is geschreven als een zelfstandig boek, dat geschikt is voor iedereen met voldoende kennis van de analyse van \mathbb{R} - \mathbb{R} -functies. Als doelgroep hebben we vooral studenten en (aanstaande) docenten wiskunde of een ander exact vak op het oog.

Lineaire Algebra en Voortgezette Analyse geeft op universitair bachelorniveau de theoretische onderbouwing van een klassiek en zeer toepasbaar deel van de wiskunde en legt een stevige basis voor verdere studie. Het is goed idee om dit boek te bestuderen in combinatie met meer toepassingsgerichte boeken, zoals de boeken uit de serie *Schaum's Outlines* van McGraw-Hill, die in de literatuurlijst worden genoemd. Deze boeken bevatten een groot aantal uitgewerkte opgaven en zijn daardoor zeer geschikt voor zelfstudie. De beknopte behandeling van de lineaire algebra in de eerste vier hoofdstukken maakt het gewenst dat de lezer (m/v) enige ervaring heeft met het bedrijven van meetkunde in \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3 met behulp van vectoren en matrices. Als eerste inleiding in de lineaire algebra is bijv. *Vectoren en Matrices* van Jan van de Craats geschikt.

IJlst, juli 2012

Rinse Poortinga

INHOUD

Lineaire Algebra

1 Lineaire ruimten	1
1.1 Translatieruimte. 1	
1.2 Lineaire deelruimte. 3	
1.3 Dimensie. 5	
1.4 Lineaire afbeeldingen. 8	
1.5 Affiene afbeeldingen en affiene deelruimten. 9	
1.6 Multilineaire afbeeldingen. 14	
1.7 Determinant. 16	
1.8 Inproduct. 21	
1.9 Determinant en inproduct van pijlen. 25	
2 Lineaire afbeeldingen	27
2.1 Lineaire afbeeldingen. 27	
2.2 Rijen- en kolommenrang. 32	
2.3 Transponeren. 34	
2.4 De determinant. 35	
2.5 De oplossingen van een stelsel lineaire vergelijkingen. 40	
2.6 Gauss-eliminatie. 44	
2.7 Elementaire lineaire transformaties. 50	
3 Volume van een blok	52
3.1 Blok. 52	
3.2 Convexe verzamelingen. 54	
3.3 Loodrechte projectie en spiegeling. 57	
3.4 Isometrie. 58	
3.5 De determinant van Gram. 65	
3.6 Het uitwendig product. 67	
3.7 Nog een andere formule voor het volume. 71	
4 Eigenwaarden en kwadrieken	75
4.1 Eigenwaarden. 75	
4.2 Symmetrische lineaire afbeeldingen. 79	
4.3 Kwadratische functies. 85	
4.4 Kwadrieken. 88	
4.5 Middelpunt, raakhypervlak. 96	
4.6 Pool en poolhypervlak. 100	

Analyse in \mathbb{R}^n

5 Limieten en continuïteit 103

- 5.1 Convergente rijen. 103
- 5.2 Cauchy-rij. 107
- 5.3 Intervallen. 108
- 5.4 Heine-Borel. 108
- 5.5 Continuïteit. 111
- 5.6 Lipschitzcontinuïteit en uniforme continuïteit. 113
- 5.7 Maximum en minimum. 115
- 5.8 Limieten van afbeeldingen. 117
- 5.9 \mathbb{R}^n - \mathbb{R} -functies. 118
- 5.10 Krommen. 120
- 5.11 De lengte van een kromme. 124
- 5.12 Samenhangende verzamelingen. 128
- 5.13 Gebieden. 129
- 5.14 Samenstellen van afbeeldingen. 130
- 5.15 Elementaire opbouw van functies en afbeeldingen. 130

6 Afgeleide en integraal 133

- 6.1 Partiële afgeleiden. 133
- 6.2 Differentieerbare functies. 135
- 6.3 Partiële afgeleiden van hogere orde. 146
- 6.4 Continu differentieerbare functies. 146
- 6.5 Differentieerbare afbeeldingen. 150
- 6.6 Integralen met een parameter in de integrand. 153
- 6.7 Integreren over een compact interval in \mathbb{R}^2 . 154
- 6.8 Integreren over een compact interval in \mathbb{R}^n . 155
- 6.9 Riemansommen. 157
- 6.10 Herhaalde integraal. 159
- 6.11 Integreren over een x- of y-normaal integratiedomein. 161
- 6.12 Enkele toepassingen. 163

7 Differentieerbare afbeeldingen 164

- 7.1 Differentieerbaarheid van \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^m -afbeeldingen. 164
- 7.2 Rekenregels voor de afgeleide. 166
- 7.3 Middelwaardstelling. 169
- 7.4 Extreme waarden. 171
- 7.5 Raakvlak en raakruimte, k-oppervlak in \mathbb{R}^n . 177
- 7.6 Inverse afbeelding. 184
- 7.7 Impliciet gedefinieerde functies en afbeeldingen. 187
- 7.8 Niveauverzamelingen van \mathbb{R}^n - \mathbb{R} -functies. 194
- 7.9 Niveauverzamelingen van een \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^m -afbeelding. 200

7.10 Extreme waarden van een functie op
een niveauverzameling. 204

8 Volume en integraal 210

- 8.1 Partities. 210
- 8.2 Volume en intervalssommen. 211
- 8.3 Integreren over een algemener integratiedomein. 214
- 8.4 Integralen met een meetbaar integratiedomein
en een integrand die bijna overal continu is. 216
- 8.5 Herhaalde integralen, Fubini. 219
- 8.6 Volume en integraal. 220
- 8.7 Het principe van Cavalieri. 224
- 8.8 Hoe het volume verandert onder een
affiene transformatie. 227
- 8.9 De discontinuïteiten van een integreerbare functie. 231
- 8.10 Sprongdiscontinuïteiten bij \mathbb{R} - \mathbb{R} -functies. 239

9 Volumes en integralen onder afbeeldingen..... 241

- 9.1 Volume onder \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^n -afbeeldingen. 241
- 9.2 De transformatiestelling voor integralen. 247
- 9.3 Poolcoördinaten in \mathbb{R}^2 . 250
- 9.4 Bol- en cilindercoördinaten in \mathbb{R}^3 . 255
- 9.5 Enkele standaard toepassingen. 259

10 Integreren over een k-oppervlak..... 265

- 10.1 Meetbaar k-oppervlak in \mathbb{R}^n . 265
- 10.2 Enkele toepassingen. 275
- 10.3 Integreren over een k-oppervlak in \mathbb{R}^n . 282
- 10.4 Integreren over een kromme in \mathbb{R}^n , lijnintegraal. 285
- 10.5 Integreren over een (n-1)-oppervlak in \mathbb{R}^n . 288
- 10.6 De divergentiestelling. 292
- 10.7 Uitbreiding van de divergentiestelling
naar normale integratiedomeinen. 300
- 10.8 De stelling van Green. 304
- 10.9 Primitieve. 305

Analyse in het complexe vlak

11 Krommen in \mathbb{R}^2	311
11.1 Krommen.	311
11.2 Poolcoördinaten.	315
11.3 Windingsgetal.	318
11.4 Vergelijken van windingsgetallen.	320
11.5 Gebieden waarvan alle randpunten op een kromme liggen.	322
11.6 Jordankrommen.	326
11.7 Lijnintegralen.	330
11.8 De stelling van Green.	331
11.9 Primitieve.	338
11.10 Enkelvoudig samenhangende gebieden.	342
11.11 De hoofdstelling van de algebra.	344
12 Complexe functies	348
12.1 Differentieerbaarheid van \mathbb{C} - \mathbb{C} -functies.	352
12.2 De exponentiële functie, sinus en cosinus.	359
12.3 Logaritmen.	366
12.4 Machten met een gehele exponent.	370
12.5 Polynomen.	377
12.6 Differentiëren en integreren van \mathbb{R} - \mathbb{C} -functies.	379
12.7 Krommen.	382
12.8 Integreren langs een kromme.	384
12.9 Windingsgetal.	386
12.10 Integralen met een parameter in de integrand.	388
13 De integraalstelling van Cauchy	391
13.1 Functies met een primitieve.	391
13.2 Het lemma van Goursat.	393
13.3 Enkele gevolgen van de integraalformules van Cauchy.	397
13.4 Integraalstelling en integraalformules voor Jordankrommen.	403
13.5 Residuen.	407
13.6 Enkelvoudig samenhangende gebieden.	408
13.7 Meer eigenschappen van holomorfe functies.	414
13.8 Nulpunten, polen en residuen.	420
13.9 Een algemene versie van de integraalstelling en integraalformule van Cauchy.	424
13.10 Cykels.	427

14 Reeksen	431
14.1 Taylorreeksen en Maclaurinreeksen.	431
14.2 De MacLaurinreeks van het product van twee functies.	434
14.3 Convergentiecriteria voor reeksen.	437
14.4 Uniforme convergentie.	445
14.5 Machtreeksen.	451
14.6 Eigenschappen van de limietfunctie van een machtreeks.	455
14.7 Sommeren over $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.	457
14.8 Cauchyproduct.	462
 15 Laurentreeksen	 464
15.1 Laurentreeksen.	464
15.2 De orde van een functie in een punt.	469
15.3 Berekenen van reële integralen met behulp van residuen.	474
 Literatuur	 476
 Trefwoorden	 477

3 Volume van een blok

3.1 Blok.

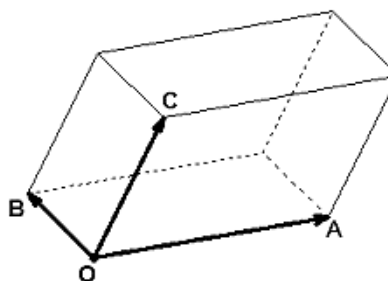
3.1.1 Definitie. De puntenverzameling $V = \{x_1 A_1 + \dots + x_k A_k \mid x_1, \dots, x_k \in [0, 1]\}$, met $A_1, \dots, A_k \in \mathbb{R}^n$ en $k \in \mathbb{N}^+$, noemen we het door de vectoren $\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \dots, \overline{OA_k}$ in \mathbb{R}^n opgespannen *blok*, notatie $V = \text{blok}(\overline{OA_1}, \dots, \overline{OA_k})$. Staan $\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \dots, \overline{OA_k}$ twee aan twee loodrecht op elkaar, dan noemen we het blok een *balk*. Zijn $\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \dots, \overline{OA_k}$ bovendien allemaal even lang, dan noemen we de balk een *kubus*. Is A_1, \dots, A_k een lineair onafhankelijk stel punten, dan noemen we het blok (de balk, de kubus) *k-dimensionaal* of kortweg een k-blok (k-balk, k-kubus).

Voorbeeld. In \mathbb{R}^n is de dimensie van een blok hoogstens gelijk aan n . De 2^k hoekpunten van het k-blok

$$V = \{x_1 A_1 + \dots + x_k A_k \mid x_1, \dots, x_k \in [0, 1]\}.$$

zijn de punten in

$$H = \{x_1 A_1 + \dots + x_k A_k \mid x_1, \dots, x_k \in \{0, 1\}\}.$$



Een 1-dimensionaal blok is een lijnstuk. Een 2-dimensionaal blok wordt een parallellogram genoemd. De 4 zijden van een parallellogram zijn lijnstukken. De 6 zijvlakken van een 3-dimensionaal blok zijn parallellogrammen [zie afbeelding]. Onder de lineaire \mathbb{R}^k - \mathbb{R}^n -afbeelding $L = [A_1, \dots, A_k]$ wordt de *eenheidskubus* $[0, 1]^k$ in \mathbb{R}^k afgebeeld op het k-blok V .

Ook het translatiebeeld van een blok in \mathbb{R}^n noemen we een blok in \mathbb{R}^n . Het blok $V = \{x_1 A_1 + \dots + x_k A_k \mid x_1, \dots, x_k \in [0, 1]\}$ gaat onder de translatie $X \mapsto C$ over in het blok $V' = \{x_1 A_1 + \dots + x_k A_k + C \mid x_1, \dots, x_k \in [0, 1]\}$. Is A_1, \dots, A_k lineair onafhankelijk, dan is V' een k-dimensionaal blok.

Het blok $W = \{P + x_1(Q_1 - P) + \dots + x_k(Q_k - P) \mid x_1, \dots, x_k \in [0, 1]\}$ heet het door de pijlen $\overline{PQ_1}, \overline{PQ_2}, \dots, \overline{PQ_k}$ opgespannen blok, notatie $W = \text{blok}(\overline{PQ_1}, \overline{PQ_2}, \dots, \overline{PQ_k})$. Dit blok bestaat uit de eindpunten van de pijlen $\overline{PX} = x_1 \overline{PQ_1} + \dots + x_n \overline{PQ_n}$ met coëfficiënten $x_1, \dots, x_k \in [0, 1]$. W is het beeld van de door $\overline{OE_1}, \overline{OE_2}, \dots, \overline{OE_k}$ opgespannen eenheidskubus in \mathbb{R}^k onder de affiene \mathbb{R}^k - \mathbb{R}^n -afbeelding F zo dat $F(O) = P$ en $F(E_1) = Q_1, \dots, F(E_k) = Q_k$.

Opgave. Stel $V = \{xA + yB + zC \mid x, y, z \in [0, 1]\}$ is een blok in \mathbb{R}^3 met A, B lineair onafhankelijk en $C = 2A + B$. Ga na dat V dan niet een 2-dimensionaal blok [ofwel een parallellogram] in \mathbb{R}^3 is.

Straks zullen we het *volume* van blokken in \mathbb{R}^n gaan definiëren. We nemen aan dat dit volume onder een translatie niet verandert, dus we kunnen ons beperken tot blokken die worden opgespannen door vectoren. Het translatiebeeld van zo'n blok kennen we dan hetzelfde volume toe.

Het k -dimensionale volume van het door $\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \dots, \overline{OA_k}$ in \mathbb{R}^n opgespannen blok duiden we aan als $\text{vol}_{k,n}(A_1, \dots, A_k)$ en we stellen

$$\text{vol}_{k,n}(\overline{PQ_1}, \dots, \overline{PQ_k}) = \text{vol}_{k,n}(Q_1 - P, \dots, Q_k - P).$$

Verder stellen we

$$\text{vol}_{1,n}(A_1) = |A_1| \text{ en } \text{vol}_{2,n}(A_1, A_2) = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \sin \angle A_1 O A_2.$$

Dus $\text{vol}_{2,n}(A_1, A_2)$ is gelijk aan de oppervlakte van het door $\overline{OA_1}, \overline{OA_2}$ opgespannen parallellogram, als A_1, A_2 lineair onafhankelijk is. Als A_1, A_2 lineair afhankelijk is, dan $\text{vol}_{2,n}(A_1, A_2) = 0$. Als $k = n$, dan bestaat de determinant $\det(A_1, \dots, A_n)$ en stellen we

$$\text{vol}_{n,n}(A_1, \dots, A_n) = |\det(A_1, \dots, A_n)|.$$

Later zullen we $\text{vol}_{k,n}(A_1, \dots, A_k)$ ook definiëren voor $k \neq 1, 2$ of n . Zie 3.4.7.

We beperken ons eerst even tot het geval $k = n$. Dan

$$\det(A_1, \dots, A_n) = 0 \Leftrightarrow A_1, \dots, A_n \text{ is lineair afhankelijk}$$

en dus ook

$$\text{vol}_{n,n}(A_1, \dots, A_n) = 0 \Leftrightarrow A_1, \dots, A_n \text{ is lineair afhankelijk.}$$

Als $\det(A_1, \dots, A_n) \neq 0$, dan noemen we de rij A_1, \dots, A_n positief resp. negatief georiënteerd, als $\det(A_1, \dots, A_n) > 0$ resp. $\det(A_1, \dots, A_n) < 0$. Dan stelt $\det(A_1, \dots, A_n)$ het georiënteerde [d.w.z. van een teken voorziene] volume voor van het door $\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \dots, \overline{OA_n}$ opgespannen blok.

Opmerking. Eigenlijk moeten we ook de determinant in \mathbb{R}^n van een index n voorzien en \det_n schrijven in plaats van \det . Als $n \neq m$, dan zijn \det_n en \det_m verschillende functies. Toch levert het weglaten van de index n eigenlijk nooit problemen op, n is wel bekend uit de context. In bepaalde situaties kan het nodig zijn dat we \det_n schrijven om misverstand te voorkomen. Hetzelfde geldt natuurlijk ook voor $\text{vol}_{k,n}(A_1, \dots, A_k)$. Het getal k kunnen we wel aflezen uit het aantal punten binnen de haakjes en n is vrijwel altijd uit de context bekend. Het kan dan geen kwaad om $\text{vol}(A_1, \dots, A_k)$ te schrijven i.p.v. $\text{vol}_{k,n}(A_1, \dots, A_k)$. Voorlopig zullen we de indices er echter voor de duidelijkheid nog bij schrijven.

Is L een lineaire afbeelding van \mathbb{R}^n in zichzelf, dan

$$\det(L(A_1), \dots, L(A_n)) = \det(L) \cdot \det(A_1, \dots, A_n).$$

Zie de opmerking na 1.7.6. Dus het n -dimensionaal volume van een blok in \mathbb{R}^n wordt onder een lineaire afbeelding L vermenigvuldigd met $|\det(L)|$.

Het *georiënteerde volume* van blok $(\overline{PQ_1}, \dots, \overline{PQ_n})$ stellen we in overeenstemming met het voorgaande gelijk aan $\det(\overline{PQ_1}, \dots, \overline{PQ_n})$. Het niet-georiënteerde volume van blok $(\overline{PQ_1}, \dots, \overline{PQ_n})$ is gelijk aan $|\det(\overline{PQ_1}, \dots, \overline{PQ_n})|$.

Onder een affiene afbeelding F van \mathbb{R}^n in zichzelf zo dat $F(X) = L(X) + C$, met L lineair, wordt dit blok afgebeeld op blok $(\overline{F(P)F(Q_1)}, \dots, \overline{F(P)F(Q_n)})$ met volume

$$\begin{aligned} \det(\overline{F(P)F(Q_1)}, \dots, \overline{F(P)F(Q_n)}) &= \det(F(Q_1) - F(P), \dots, F(Q_n) - F(P)) \\ &= \det(L(Q_1) - L(P), \dots, L(Q_n) - L(P)) = \det(L(Q_1 - P), \dots, L(Q_n - P)) \\ &= \det(L) \cdot \det(Q_1 - P, \dots, Q_n - P) = \det(L) \cdot \det(\overline{PQ_1}, \dots, \overline{PQ_n}). \end{aligned}$$

Dus onder een affiene afbeelding F wordt het georiënteerd volume van een blok vermenigvuldigd met de determinant van het lineaire deel van F .

3.1.2 Is F een affiene afbeelding van \mathbb{R}^n in zichzelf zo dat $F(X) = L(X) + C$, met L lineair, dan $\det(\overline{F(P)F(Q_1)}, \dots, \overline{F(P)F(Q_n)}) = \det(L) \cdot \det(\overline{PQ_1}, \dots, \overline{PQ_n})$.

Opmerking. Een affiene afbeelding $F(X) = L(X) + C$ induceert op de lineaire pijlenruimte $\{\overline{PX} \mid X \in \mathbb{R}^n\}$ een afbeelding \vec{F} zo dat $\vec{F}(\overline{PX}) = \overline{F(P)F(X)}$. Deze afbeelding \vec{F} is lineair $\Leftrightarrow F$ is affien.

N.B. Alleen een n -dimensionaal blok heeft in \mathbb{R}^n een oriëntatie. Aan blokken met een lagere dimensie in \mathbb{R}^n wordt geen oriëntatie toegekend.

3.2 Convexe verzamelingen.

3.2.1 Definitie. Een verzameling $V \subset \mathbb{R}^n$ heet *convex*, als V met ieder tweetal punten P en Q ook alle punten van het lijnstuk PQ bevat.

Lijnstuk PQ bestaat uit de punten $P + t \cdot (Q - P) = (1-t)P + tQ$ met $0 \leq t \leq 1$. Anders gezegd: X ligt op lijnstuk PQ , als $X = uP + vQ$ met $u + v = 1$ en $u, v \in [0, 1]$.

We noemen X dan een *convexe combinatie* van P en Q . $V \subset \mathbb{R}^n$ is convex precies dan, wanneer V met P en Q ook iedere convexe combinatie van P en Q bevat. Op triviale wijze is ook de lege verzameling convex.

Voorbeelden. In \mathbb{R} zijn de intervallen de convexe deelverzamelingen. Voorbeelden van convexe verzamelingen in \mathbb{R}^2 zijn halfvlakken, het binnengebied van een driehoek, parallellogram of cirkel (we mogen ook nog de grenslijnen er bij nemen). In \mathbb{R}^n is een k -dimensionaal blok een convexe verzameling. \mathbb{R}^n zelf is convex en ook een verzameling die slechts één punt bevat is volgens de definitie convex. De n -dimensionale bol $B_n = \{X \in \mathbb{R}^n \mid |X - M| \leq r\}$ in \mathbb{R}^n met middelpunt M en straal $r > 0$ is convex. Iedere affine deelruimte van \mathbb{R}^n is een convexe deelverzameling van \mathbb{R}^n .

Toon aan:

3.2.2 Is A_1, \dots, A_k een eindig aantal punten in \mathbb{R}^n , dan is

$$V = \{x_1 A_1 + \dots + x_k A_k \mid x_1, \dots, x_k \in [0, 1], x_1 + \dots + x_k = 1\}$$

de kleinste convexe deelverzameling van \mathbb{R}^n die de punten A_1, \dots, A_k bevat.

We noemen V de *convexe omhulling* van A_1, \dots, A_k en een element $x_1 A_1 + \dots + x_k A_k$ van V met $x_1, \dots, x_k \in [0, 1]$ en $x_1 + \dots + x_k = 1$ heet een *convexe combinatie* van de punten A_1, \dots, A_k . [Dat V de *kleinste* convexe deelverzameling van \mathbb{R}^n is die de punten A_1, \dots, A_k bevat, houdt in dat $V \subset W$, wanneer W een andere convexe verzameling is die de punten A_1, \dots, A_k bevat.]

Opgave. V is convex precies dan, wanneer V gesloten is m.b.t. convexe combinaties van punten. Toon aan dat de doorsnede van een eindig of oneindig aantal convexe deelverzamelingen van \mathbb{R}^n convex is. Is W een willekeurige deelverzameling van \mathbb{R}^n , dan is de *convexe omhulling* van W de doorsnede van alle convexe deelverzamelingen van \mathbb{R}^n die W omvatten. Als $W = \{A_1, \dots, A_k\}$, dan is de convexe omhulling van W de verzameling V uit 3.2.2. [Ga na dat $W = V = \emptyset$, als $k = 0$.]

3.2.3 *Definitie simplex.* Is P, Q_1, \dots, Q_k een affien onafhankelijke rij punten in \mathbb{R}^n , dan is de convexe omhulling van P, Q_1, \dots, Q_k het *k -dimensionale simplex* of *k -simplex* met hoekpunten P, Q_1, \dots, Q_k . Dit simplex bestaat uit de eindpunten van de pijlen $\overline{PX} = x_1 \overline{PQ_1} + \dots + x_k \overline{PQ_k}$ met $x_1, \dots, x_k \in [0, 1]$ en $0 \leq x_1 + \dots + x_k \leq 1$.

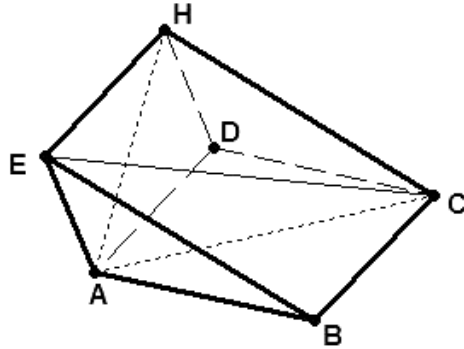
Voorbeeld. In \mathbb{R}^3 is de convexe omhulling van O, E_1, E_2, E_3 het *standaard 3-dimensionale simplex*. De zijvlakken, ribben en hoekpunten van deze piramide zijn de standaard 2-dimensionale resp. 1-dimensionale resp. 0-dimensionale simplexen in \mathbb{R}^3 . In \mathbb{R}^k is het standaard k -dimensionale simplex de convexe omhulling van O, E_1, \dots, E_k en bestaat uit de punten $x_1, \dots, x_k \in [0, 1]$ en $0 \leq x_1 + \dots + x_k \leq 1$. Het k -dimensionale simplex met hoekpunten P, Q_1, \dots, Q_k in \mathbb{R}^n uit definitie 3.2.3 is dus het beeld van het standaard k -dimensionale simplex met hoekpunten O, E_1, \dots, E_k in \mathbb{R}^k onder de affine $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ -afbeelding F zo dat $F(O) = P$, $F(E_1) = Q_1, \dots$,

$F(E_k) = Q_k$. [Onder een affiene afbeelding gaat een affiene combinatie over in een affiene combinatie met dezelfde coëfficiënten, dus een convexe combinatie gaat over in een convexe combinatie.]

Voorbeeld. In \mathbb{R}^2 kunnen we ieder parallellogram door het trekken van een diagonaal verdelen in twee congruente driehoeken. Dat maakt het mogelijk om in \mathbb{R}^2 de oppervlakte van een driehoek te definiëren als de helft van de oppervlakte van een parallellogram. Een niet-ontaarde driehoek in \mathbb{R}^2 is een tweedimensionaal simplex in \mathbb{R}^2 .

Voorbeeld. In \mathbb{R}^3 is een driedimensionaal simplex een piramide met 4 driehoeken als zijvlakken. Het 3-dim. simplex $OABC$ in \mathbb{R}^3 , met A, B, C lin. onafh., is de puntenverzameling $W = \{xA + yB + zC \mid x, y, z \in [0, 1], 0 \leq x + y + z \leq 1\}$. We kunnen blok $V = \{xA + yB + zC \mid x, y, z \in [0, 1]\}$ opsplitsen in 6 simplexen, waarvan de binnengebieden geen punten gemeen hebben, die alle 6 dezelfde inhoud hebben, maar die niet congruent zijn. Dat zou betekenen dat de inhoud van simplex W gelijk is aan $\frac{1}{6} \times$ inhoud van blok $V = \frac{1}{6} \cdot |\det(A, B, C)|$. Dat kunnen we echter op dit moment nog niet bewijzen. Voor andere lichamen in \mathbb{R}^3 dan blokken hebben we de inhoud überhaupt nog niet gedefinieerd. Het bewijs berust op een speciaal geval van het principe van Cavalieri. Zie de volgende opgave.

Opgave. Op school hebben we geleerd dat de inhoud van een piramide gelijk is aan $\frac{1}{3} \times$ grondvlak \times hoogte. Dat betekent dat 2 simplexen met congruente grondvlakken en gelijke hoogte dezelfde inhoud hebben. Het maakt daarbij niet uit welk zijvlak van het simplex we als grondvlak beschouwen. Neem even aan dat dit inderdaad zo is. [Later zullen we dit bewijzen.] We nemen



een balk $ABCD EFGH$ en verdelen de balk eerst door het diagonaalvlak $BCHE$ in 2 congruente helften. De halve balk wordt opgesplitst in de 3 simplexen $ADHC$, $AEHC$ en $ABEC$. Zie figuur. Toon aan dat deze simplexen allemaal dezelfde inhoud hebben. Ga na dat dit ook geldt voor een blok dat geen balk is. De inhoud van elk van de simplexen is dus $\frac{1}{6} \times$ inhoud balk (blok).

Opmerking. Later zullen we ook het volume van andere lichamen dan blokken definiëren. We zullen dan zien dat in \mathbb{R}^n het simplex met hoekpunten O, A_1, \dots, A_n een

volume $\frac{1}{n!} \cdot |\det(A_1, \dots, A_n)|$ heeft.

3.3 Loodrechte projectie en spiegeling.

Stel U is een lineaire deelruimte van \mathbb{R}^n met orthonormale basis A_1, \dots, A_k en P is een punt in \mathbb{R}^n . Dan is er een unieke $Q \in U$ zo dat $PQ \perp U$. [Bewijs. Stel $Q = x_1 A_1 + \dots + x_k A_k$. Dan $PQ \perp U \Leftrightarrow \langle P - Q, A_i \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle P, A_i \rangle = \langle Q, A_i \rangle = x_i$ voor $i = 1, \dots, k$. Dus $Q = \langle P, A_1 \rangle \cdot A_1 + \dots + \langle P, A_k \rangle \cdot A_k$ is het gezochte punt Q .] Punt Q heet de *loodrechte projectie* van punt P op de lineaire ruimte U . Als $P \in U$, dan $Q = P$. We definiëren $d(P, U)$, de afstand van P tot U , door middel van $d(P, U) = d(P, Q)$.

Algemener:

3.3.1 Is V een affiene deelruimte van \mathbb{R}^n en P een punt in \mathbb{R}^n , dan is er precies één punt $Q \in V$ zo dat $PQ \perp V$. We noemen dit punt Q de (*loodrechte*) *projectie* van P op V en we stellen $d(P, V) = d(P, Q) = PQ$. De afbeelding F die $P \in \mathbb{R}^n$ afbeeldt op zijn projectie Q op V , noemen we *de projectie van \mathbb{R}^n op V* .

Bewijs. Stel $V = U + C$, waarin de lineaire ruimte U de richtingsruimte van V is. Er geldt $PQ \perp V \Leftrightarrow PQ \perp U \Leftrightarrow P'Q' \perp U$ met $P' = P - C$ en $Q' = Q - C$. We nemen voor Q' de loodrechte projectie van P' op U . Het gezochte punt $Q \in V$ is dan $Q = Q' + C$.

3.3.2 Definitie. Is V een affiene deelruimte van \mathbb{R}^n , dan noemen we de punten P en Q elkaars *spiegelbeeld* t.o.v. V , wanneer $PQ \perp V$ en het midden M van lijnstuk PQ in V ligt. De *spiegeling* S van \mathbb{R}^n t.o.v. de affiene deelruimte V is de 1-1-afbeelding van \mathbb{R}^n op zichzelf die ieder punt $P \in \mathbb{R}^n$ afbeeldt op zijn spiegelbeeld Q .

Zijn P en Q elkaars spiegelbeeld t.o.v. V , dan is $M = \frac{1}{2}(P + Q)$ de projectie van zowel P als Q op V . De spiegeling S van \mathbb{R}^n t.o.v. de affiene deelruimte V beeldt ieder punt $P \in V$ op zichzelf af. Een spiegeling is zijn eigen inverse: er geldt $S^{-1} = S$. Merk op dat S de identieke afbeelding van \mathbb{R}^n is, wanneer $V = \mathbb{R}^n$. Als $V = \{C\}$, dan is S de *puntspiegeling* t.o.v. punt C . Straks zullen we zien dat iedere spiegeling tot stand gebracht kan worden door een opeenvolging van spiegelingen t.o.v. een hypervlak [een lijn in \mathbb{R}^2 , een vlak in \mathbb{R}^3].

3.3.3 Een spiegeling S van \mathbb{R}^n t.o.v. een affiene deelruimte V is een affiene afbeelding. Is V een lineaire deelruimte van \mathbb{R}^n , dan is S lineair.

Bewijs. We gaan eerst na dat een spiegeling L t.o.v. een lineaire deelruimte U een lineaire afbeelding is. Kies een orthonormale basis A_1, \dots, A_k van U .

De projectie van punt P op U is dan het punt $M = \langle P, A_1 \rangle \cdot A_1 + \dots + \langle P, A_k \rangle \cdot A_k$. Voor het spiegelbeeld Q van P geldt dan $P + Q = 2M$, dus $Q = L(P) = 2M - P$. L is lineair, wanneer $L(cP) = c \cdot L(P)$ en $L(P_1 + P_2) = L(P_1) + L(P_2)$. Ga na dat dit inderdaad het geval is.

Stel nu dat S de spiegeling is t.o.v. de affiene deelruimte $V = U + C$.

Dan vinden we $S(P) = Q$ als volgt:

- Pas eerst de translatie $X \mapsto X - C$ toe.
Dat geeft $P - C$.
- Pas daarna L toe.
Dat geeft het spiegelbeeld $L(P - C) = L(P) - L(C)$ van $P - C$ t.o.v. U .
- Pas tenslotte de translatie $X \mapsto X + C$ toe.
Dat geeft $S(P) = Q = L(P) - L(C) + C$.

Dan $P - Q = (P - L(P)) + (C - L(C))$ met $(P - L(P)) \perp U$ en ook $(C - L(C)) \perp U$.

Hieruit volgt $(P - Q) \perp U$ en ook $(P - Q) \perp V$. Tenslotte $M = \frac{1}{2}(P + Q)$

$= \frac{1}{2}(P + L(P) - L(C) + C) = \frac{1}{2}(P + L(P)) - \frac{1}{2}(C + L(C)) + C$ ligt in V . Ga dit na.

3.3.4 Is S een spiegeling van \mathbb{R}^n t.o.v. een affiene deelruimte V , dan geldt

$|S(X) - S(Y)| = |X - Y|$, m.a.w. S laat afstanden intact.

Bewijs. Het is voldoende dat we dit aantonen voor een lineaire spiegeling S [een translatie laat afstanden intact]. Stel S is een spiegeling van \mathbb{R}^n t.o.v. een lineaire deelruimte U van \mathbb{R}^n . Dan $O \in U$ en $S(O) = O$. Als $S(P) = Q$ en $M = \frac{1}{2}(P + Q)$, dan $OP^2 = OM^2 + MP^2$ en $OQ^2 = OM^2 + MQ^2 = OM^2 + MP^2$ volgens de stelling van Pythagoras. Dus $OP = OQ$ ofwel $|S(P)| = |P|$. Met $P = X - Y$ krijgen we $|S(X - Y)| = |S(X) - S(Y)| = |X - Y|$.

3.4 Isometrie. Spiegelelingen en translaties zijn voorbeelden van isometrieën.

3.4.1 Definitie. Een \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^m -afbeelding F heet een *isometrie*, als afstanden onder F intact blijven, d.w.z. $|F(X) - F(Y)| = |X - Y|$ voor $X, Y \in \mathbb{R}^n$.

Iedere isometrie is een affiene afbeelding.

3.4.2 Is de \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^m -afbeelding F een isometrie, dan is F een 1-1-affiene afbeelding.

Bewijs. Iedere isometrie is 1-1. We laten eerst zien dat een \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^m -isometrie F lineair is, wanneer $F(O) = O$ (d.w.z. $F(O_n) = O_m$). Stel F is zo'n isometrie. Dan $|F(X)| = |X|$ voor $X \in \mathbb{R}^n$ [bedenk dat $F(X) = F(X) - F(O)$.] Uit

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2}(|X|^2 + |Y|^2 - |X - Y|^2)$$

volgt dan $\langle F(X), F(Y) \rangle = \langle X, Y \rangle$ voor $X, Y \in \mathbb{R}^n$. Met $F(E_1) = A_1, \dots, F(E_n) = A_n$ geldt $|A_1| = \dots = |A_n| = 1$ en $\langle A_i, A_j \rangle = 0$ voor $i \neq j$. De rij A_1, \dots, A_n in \mathbb{R}^m is lineair onafhankelijk, dus in ieder geval geldt $n \leq m$. De lineaire \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^m -afbeelding $L = [A_1, \dots, A_n]$ is een isometrie met $V = \{x_1 A_1 + \dots + x_n A_n \mid (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$ als beeldruimte.

We gaan na dat $F = L \cdot A_1, \dots, A_n$ is een orthonormale basis van V . Als $n < m$, dan breiden we A_1, \dots, A_n met A_{n+1}, \dots, A_m uit tot een orthonormale basis van \mathbb{R}^m . Met $P \in \mathbb{R}^n$ kunnen we $F(P) \in \mathbb{R}^m$ schrijven als

$$F(P) = q_1 A_1 + \dots + q_n A_n + q_{n+1} A_{n+1} + \dots + q_m A_m.$$

Voor $i = 1, \dots, n$ geldt $q_i = \langle F(P), A_i \rangle = \langle F(P), F(E_i) \rangle = \langle P, E_i \rangle = p_i$. Dus

$$F(P) = p_1 A_1 + \dots + p_n A_n + q_{n+1} A_{n+1} + \dots + q_m A_m.$$

Er geldt $|F(P)|^2 = |P|^2 = p_1^2 + \dots + p_n^2$, waaruit volgt dat $q_{n+1} = \dots = q_m = 0$ en

$$F(P) = p_1 A_1 + \dots + p_n A_n = L(P).$$

We veronderstelden dat $F(O) = O$. Als $F(O) = C \neq O$, dan is $L(X) = F(X) - C$ een isometrie en $L(O) = O$. Dus L is lineair en $F(X) = L(X) + C$ is affien.

Opgave. Bewijs 3.4.2 nog eens op een andere manier via de volgende bewijschets: Stel de \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^m -afbeelding F is een isometrie met $F(O) = O$. Met $A \neq B$ en C tussen A en B in \mathbb{R}^n geldt $F(A) \neq F(B)$ en $F(C)$ tussen $F(A)$ en $F(B)$. [C tussen A en B precies dan, wanneer $AC + CB = AB$.] Ga na dat $F(tA) = t \cdot F(A)$. Daaruit volgt $F(\frac{1}{2}(A+B)) = \frac{1}{2}(F(A) + F(B))$ en dan ook $F(A+B) = F(A) + F(B)$. Daarmee is aangetoond dat F lineair is.

A_1, \dots, A_n is een orthonormaal stel punten, wanneer de vectoren $\overline{OA_1}, \dots, \overline{OA_n}$ allemaal de lengte 1 hebben en twee aan twee loodrecht op elkaar staan.

3.4.3 Een lineaire \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^m -afbeelding $L = [A_1, \dots, A_n]$ is een isometrie

$$\Leftrightarrow \langle L(X), L(Y) \rangle = \langle X, Y \rangle \text{ voor } X, Y \in \mathbb{R}^n$$

$$\Leftrightarrow A_1, \dots, A_n \text{ is een orthonormaal stel punten in } \mathbb{R}^n.$$

Een affiene \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^m -afbeelding is een isometrie precies dan, wanneer zijn lineair deel een isometrie is.

Opgave. Bewijs dit.

Opmerking. Uit de cosinusregel [zie 1.9.2] volgt dat hoeken onder een isometrie gelijk blijven. [Hoe?]

Eigenschappen van figuren die behouden blijven onder isometrieën vormen het onderwerp van de *euclidische meetkunde*. Een \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^n -isometrie noemen we ook een *congruentieafbeelding* \mathbb{R}^n op zichzelf of kortweg een *congruentie* van \mathbb{R}^n . De congruenties van \mathbb{R}^n vormen een transformatiegroep van \mathbb{R}^n . We noemen twee figuren V_1 en V_2 in \mathbb{R}^n *congruent*, notatie $V_1 \cong V_2$, wanneer er een congruentie F is zo dat $F(V_1) = V_2$.

3.4.4 Zijn A_1, \dots, A_n en B_1, \dots, B_n orthonormale bases van \mathbb{R}^n , dan is er precies één lineaire congruentie L van \mathbb{R}^n zo dat $L(A_i) = B_i$ voor $i = 1, \dots, n$.

Opgave. Bewijs dit.

Een affine afbeelding F van \mathbb{R}^n in zichzelf is bepaald door de beelden Q_0, Q_1, \dots, Q_n van $n+1$ affien onafhankelijke punten P_0, P_1, \dots, P_n in \mathbb{R}^n . Zie 1.5.7. Als F een congruentie van \mathbb{R}^n is, dan blijven afstanden intact, dus $Q_i Q_j = P_i P_j$ voor $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$. Omgekeerd blijkt dit ook voldoende om te garanderen dat de affine afbeelding F een congruentie van \mathbb{R}^n is. Zoals bekend is iedere congruentie van \mathbb{R}^2 een samenstelling van hooguit 3 spiegelingen. De hierbij gebruikte spiegelingen zijn spiegelingen t.o.v. een lijn. In \mathbb{R}^2 zijn lijnen hypervlakken. De bewijzen m.b.t. congruenties van \mathbb{R}^2 [zie bijv. AM7.9] zijn eenvoudig te generaliseren naar een bewijs van de volgende stelling m.b.t. congruenties van \mathbb{R}^n . In \mathbb{R}^n moeten we spiegelen t.o.v. een hypervlak, d.w.z. een affine deelruimte met dimensie $n-1$. Twee punten $P \neq Q$ in \mathbb{R}^n zijn elkaars spiegelbeeld t.o.v. het *middelloodhypervlak* van lijnstuk PQ . Ga na dat dit middelloodhypervlak wordt gegeven door de vergelijking $\langle P - Q, X - M \rangle = 0$ met $M = \frac{1}{2}(P + Q)$. Toon aan:

3.4.5 Is P_0, P_1, \dots, P_n een affien onafhankelijke puntenrij in \mathbb{R}^n en is Q_0, Q_1, \dots, Q_n puntenrij in \mathbb{R}^n zo dat $Q_i Q_j = P_i P_j$ voor $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$, dan is de affine afbeelding F zo dat $F(P_i) = Q_i$, voor $i = 0, 1, \dots, n$, een congruentie van \mathbb{R}^n . De congruentie F kan tot stand gebracht worden als samenstelling van hoogstens $n+1$ spiegelingen t.o.v. hypervlakken in \mathbb{R}^n .

Dit geldt i.h.b. voor iedere spiegeling t.o.v. een affine deelruimte V van \mathbb{R}^n . We hebben dus in principe geen andere spiegelingen nodig dan spiegelingen t.o.v. een hypervlak.

Opmerking. Een hypervlak V dat door O gaat is een lineaire deelruimte. De spiegeling S t.o.v. V is dan een lineaire afbeelding.

Is L een lineaire congruentie van \mathbb{R}^n , dan krijgen we de matrix van L^{-1} door die van L te transponeren.

3.4.6 Is L een lineaire congruentie van \mathbb{R}^n , dan $L^{-1} = L^T$ en $\det(L) = \pm 1$.

Bewijs. Ga eerst na: $\langle X, A \rangle = 0$ voor iedere $X \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow A = O$. Gevolg:

$$(*) \langle X, A \rangle = \langle X, B \rangle \text{ voor iedere } X \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow A = B.$$

Stel nu L is een lineaire congruentie van \mathbb{R}^n . Dan $\langle X, Y \rangle = \langle L(X), L(Y) \rangle$ en volgens 2.3.2 geldt

$$\langle L(X), L(Y) \rangle = \langle X, L^T(L(Y)) \rangle = \langle X, (L^T \circ L)(Y) \rangle.$$

Met behulp van (*) volgt dan $(L^T \circ L)(Y) = Y$ voor $Y \in \mathbb{R}^n$, m.a.w. $L^{-1} = L^T$. Er geldt $\det(L^{-1}) = 1/\det(L)$ en $\det(L^T) = \det(L)$. Hieruit volgt $\det(L) = \pm 1$.

Opgave. Toon aan dat omgekeerd ook geldt: is de lineaire \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^n -afbeelding L omkeerbaar en $L^{-1} = L^T$, dan is L een congruentie van \mathbb{R}^n .

Is L een lineaire spiegeling, dan heeft L zichzelf tot inverse en L is een lineaire congruentie, dus $L^{-1} = L = L^T$. De matrix van een lineaire spiegeling is *symmetrisch t.o.v. zijn hoofddiagonaal*. Ook de afbeelding L noemen we *symmetrisch*, als $L = L^T$. Voor een symmetrische lineaire afbeelding L van \mathbb{R}^n in zichzelf geldt $\langle L(X), Y \rangle = \langle X, L(Y) \rangle$ voor iedere $X, Y \in \mathbb{R}^n$. Ga na dat het samenstellen van symmetrische afbeeldingen weer een symmetrische afbeelding oplevert.

Een lineaire spiegeling t.o.v. een hypervlak heeft determinant -1 .

3.4.7 Is L een lineaire spiegeling van \mathbb{R}^n t.o.v. een hypervlak, dan $\det(L) = -1$.

Bewijs. Stel L is een lineaire spiegeling van \mathbb{R}^n t.o.v. een hypervlak V . Dan is V een lineaire deelruimte van \mathbb{R}^n en $\dim(V) = n-1$. Laat A_1, \dots, A_{n-1} een orthonormale basis van V zijn, aangevuld met A_n tot een orthonormale basis van \mathbb{R}^n . Dan $L(A_1) = A_1, \dots, L(A_{n-1}) = A_{n-1}$ en $L(A_n) = -A_n$. Dus volgens 1.7.6

$$\det(L) = \frac{\det(A_1, \dots, A_{n-1}, -A_n)}{\det(A_1, \dots, A_{n-1}, A_n)} = -1.$$

Opgave. Toon aan dat een spiegeling van \mathbb{R}^n t.o.v. een affiene deelruimte V met $\dim(V) = k$ tot stand gebracht kan worden door $n-k$ spiegelingen t.o.v. een hypervlak.

3.4.8 Is V is een affiene deelruimte, P een punt en F een congruentie van \mathbb{R}^n , dan $d(P, V) = d(F(P), F(V))$. M.a.w. Een congruentie van \mathbb{R}^n laat de afstand tussen een punt en een affiene deelruimte van \mathbb{R}^n intact.

Opgave. Toon dit aan.

Opgave. Het door de pijlen $\overline{PQ_1}, \dots, \overline{PQ_n}$ opgespannen blok in \mathbb{R}^n is een balk, wanneer deze pijlen twee aan twee loodrecht op elkaar staan. Stel dit is het geval en $PQ_1 = c_1, \dots, PQ_n = c_n$. Toon aan dat er dan een congruentie F van \mathbb{R}^n is zo dat

$$F(O) = P \text{ en } F(C_i) = Q_i, \text{ met } C_i = c_i E_i \text{ voor } i = 1, \dots, n, \text{ en dat}$$

$$|\det(\overline{PQ_1}, \dots, \overline{PQ_n})| = |\det(C_1, \dots, C_n)| = c_1 \cdots c_n.$$

Het volume van de balk is gelijk aan $c_1 \cdots c_n$ [in \mathbb{R}^2 lengte \times breedte, in \mathbb{R}^3 lengte \times breedte \times hoogte].

Onder een congruentie F van \mathbb{R}^n verandert het volume van een n -dimensionaal blok niet. Dit geldt overigens niet alleen voor congruenties. Iedere affine afbeelding F van \mathbb{R}^n in zichzelf met een lineair deel L zo dat $|\det(L)| = 1$ laat het volume van een blok opgespannen door n vectoren intact.

3.4.9 Het volume $|\det(A_1, \dots, A_n)|$ van blok $V = \{x_1 A_1 + \dots + x_n A_n \mid 0 \leq x_1, \dots, x_n \leq 1\}$ in \mathbb{R}^n is gelijk aan $c_1 \cdots c_n$, waarin $c_i = d(A_i, \text{span}\{A_1, \dots, A_{i-1}\})$ voor $i = 1, \dots, n$.

[Merk op dat $c_1 = d(A_1, \text{span}\{\emptyset\}) = d(A_1, O) = |A_1|$.]

Bewijs. Stel A_1, \dots, A_n is een basis van \mathbb{R}^n en P is een lineaire combinatie van A_1, \dots, A_{n-1} . Dan $\det(A_1, \dots, A_{n-1}, A_n) = \det(A_1, \dots, A_{n-1}, A_n - P)$. We nemen voor P de projectie van A_n op $\text{span}\{A_1, \dots, A_{n-1}\}$ en stellen we $A'_n = A_n - P$. Toon aan dat $A'_n \perp \text{span}\{A_1, \dots, A_{n-1}\}$ en $|A'_n| = d(A_n, \text{span}\{A_1, \dots, A_{n-1}\})$.

Vervolgens vervangen we op dezelfde manier A_{n-1} door A'_{n-1} zo dat

$$A'_{n-1} \perp \text{span}\{A_1, \dots, A_{n-2}\}, \quad |A'_{n-1}| = d(A_{n-1}, \text{span}\{A_1, \dots, A_{n-2}\}) \text{ en} \\ \det(A_1, \dots, A_{n-2}, A_{n-1}, A_n) = \det(A_1, \dots, A_{n-2}, A'_{n-1}, A'_n).$$

Zo kunnen we doorgaan totdat we tenslotte A_2 vervangen hebben door A'_2 zo dat

$$A'_2 \perp A_1, \quad |A'_2| = d(A_2, \text{lijn } OA_1) \text{ en } \det(A_1, A'_2, \dots, A'_n) = \det(A_1, A_2, \dots, A_n).$$

Daarmee is het door $\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \dots, \overline{OA_n}$ opgespannen blok omgevormd tot de balk opgespannen door $\overline{OA_1}, \overline{OA'_2}, \dots, \overline{OA'_n}$. Balk en blok hebben dan hetzelfde volume $|\det(A_1, \dots, A_n)|$.

Volgens de laatste opgave geldt $|\det(A_1, \dots, A_n)| = c_1 \cdots c_n$, waarin

$$c_i = |A'_i| = d(A_i, \text{span}\{A_1, \dots, A_{i-1}\}) \text{ voor } i = 2, \dots, n \text{ en } c_1 = |A_1|.$$

Merk op dat dit ook nog geldt wanneer $\det(A_1, \dots, A_n) = 0$. In dat geval is minstens één van de getallen c_1, \dots, c_n gelijk aan 0.

