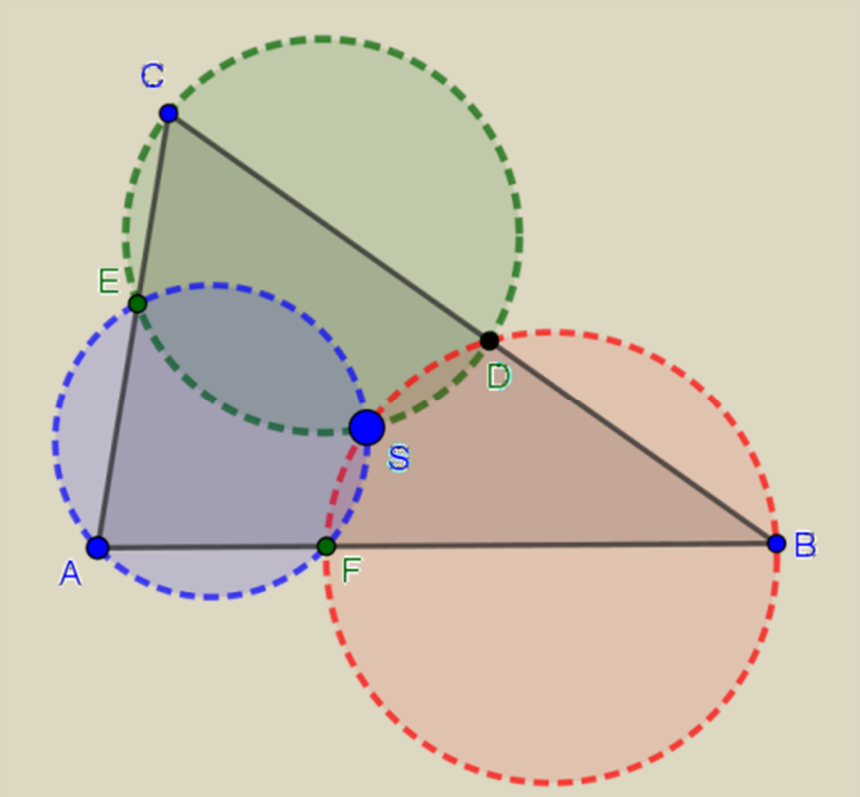
Rinse Poortinga

Elementaire Meetkunde



[Deze korte versie bevat alleen de hoofdstukken 1,2,3,7,8. De volledige versie bevat 14 hoofdstukken.]

Rinse Poortinga

Elementaire Meetkunde

© 2018 Rinse Poortinga
ISBN 978-90-818135-3-2
NUR 918

http://www.rinsepoortinga.nl

Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, door middel van druk, fotokopieën, geautomatiseerde gegevensbestanden of op welke andere wijze ook zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

Wat verstaan we onder elementaire meetkunde?

Er zijn veel boeken met de titel 'Elementaire Meetkunde'. Niet alle auteurs verstaan hieronder hetzelfde. Dit boek behandelt in de eerste 12 hoofdstukken de vlakke meetkunde in $\mathbb{R}^2$ en de ruimtemeetkunde in $\mathbb{R}^3$ met behulp van eenvoudige lineaire algebra.

De belangrijkste vlakke figuren zijn lijnen en met behulp van lijnen gedefinieerde figuren als lijnstukken, halve lijnen, hoeken, driehoeken, vierhoeken, etc. Van oudsher worden in de elementaire vlakke meetkunde ook cirkels behandeld. Meestal komen daar nog de kegelsneden bij. Vlakke figuren liggen in $\mathbb{R}^2$ of in een vlak van $\mathbb{R}^3$. In $\mathbb{R}^3$ komen we daarnaast ruimtelijke figuren als prisma's, piramiden, kegels en bollen tegen. De doorsnede van een ruimtelijke figuur met een vlak levert een vlakke figuur op. In $\mathbb{R}^3$ bestaat een kegel [of kegeloppervlak] met top O en de z-as als as uit de punten die liggen op lijnen door O die een vaste hoek met de z-as maken. Doorsnijden we zo'n kegel met vlakken die niet door O gaan, dan krijgen we ellipsen (waartoe we ook cirkels rekenen), hyperbolen of parabolen.

Door twee verschillende punten gaat precies één lijn. Een affiene deelruimte van $\mathbb{R}^2$ of $\mathbb{R}^3$ bevat minstens één punt en bevat met twee verschillende punten X en Y ook alle andere punten van lijn XY. Lijnen en vlakken zijn affiene ruimten met dimensie 1 resp. 2. Een verzameling die precies één punt bevat is een affiene deelruimte met dimensie 0. $\mathbb{R}^2$ is een 2-dimensionale en $\mathbb{R}^3$ is een 3-dimensionale affiene ruimte. We kunnen $\mathbb{R}$ als een 1-dimensionale affiene ruimte opvatten. Affiene afbeeldingen beelden affiene ruimten af op affiene ruimten met dezelfde of een lagere dimensie. Belangrijk zijn de omkeerbare affiene afbeeldingen, die affiene ruimten afbeelden op affiene ruimten van dezelfde dimensie. Zo'n afbeelding is een 1-1-correspondentie tussen twee affiene ruimten en we kunnen ons afvragen welke meetkundige eigenschappen corresponderende figuren gemeen hebben. Een omkeerbare afbeelding noemen we ook transformatie. Een transformatie die een verzameling V op zichzelf afbeeldt heet een transformatie van V.

Bij een affiene transformatie gaan lijnen over in lijnen en blijft evenwijdigheid van lijnen behouden, d.w.z. twee evenwijdige lijnen k en l worden afgebeeld op twee evenwijdige lijnen k' en l'. Dus parallellogrammen gaan over in parallellogrammen. Figuren die door een affiene transformatie in elkaar overgaan heten affien equivalent. Zulke figuren hebben dezelfde affiene eigenschappen. Zo zijn bijv. alle driehoeken affien equivalent. Een affiene eigenschap die geldt voor één driehoek geldt voor alle driehoeken. Afstanden, lengtes en loodrechte stand van lijnen blijven i.h.a. niet behouden onder affiene transformaties. Het beeld van een cirkel of een bol onder een affiene transformatie is een ellips resp. ellipsoïde. Wel blijven verhoudingen van drie verschillende punten op een lijn behouden onder een affiene transformatie. Als A, B en C op een lijn liggen en A', B' en C' zijn de beelden onder een affiene transformatie, dan liggen A', B' en C' ook op een lijn en $A'C' : B'C' = AC : BC$.

Een isometrische transformatie ofwel een congruentie is een affiene transformatie, waarbij afstanden behouden blijven. Algemener is een affiene transformatie een gelijkvormigheid, als daarbij alle afstanden met een vaste factor $c > 0$ vermenigvuldigd worden. Een affiene transformatie is een gelijkvormigheid, precies dan, wanneer ieder tweetal lijnen dat loodrecht op elkaar staat, wordt afgebeeld op een tweetal lijnen dat loodrecht op elkaar staat. Hierbij gaan cirkels en bollen over in cirkels resp. bollen. Drie verschillende punten *A*, *B* en *C* , die niet op een lijn hoeven te liggen, worden door een gelijkvormigheid afgebeeld op punten A', B' en C' zo dat $A'C' : B'C' = AC : BC$. Onder een gelijkvormigheid gaan hoeken over in even grote hoeken, i.h.b. gaan rechte hoeken over in rechte hoeken.

Als *V* en V' twee vlakken in $\mathbb{R}^3$ zijn die niet door *O* gaan, dan kunnen we de punten van vlak *V* vanuit *O* projecteren op de punten van vlak V' . Hierbij beelden we punt *X* af op het snijpunt X' van lijn *OX* met vlak X' . Probleem hierbij is dat dit niet altijd een 1-1-correspondentie tussen de vlakken *V* en V' oplevert. Als lijn *OX* evenwijdig is met vlak V' , dan correspondeert met punt *X* in *V* niet een punt X' in V' . Omgekeerd: als X' een punt in vlak V' is zo dat lijn OX' evenwijdig is met vlak *V*, dan is er niet een punt *X* in *V* dat correspondeert met punt X' in V' . Dit probleem is op te lossen door $\mathbb{R}^3$ uit te breiden met *oneindig verre punten* en wel zo dat twee lijnen in $\mathbb{R}^3$ evenwijdig zijn precies dan, wanneer ze door hetzelfde oneindig verre punt gaan. Een lijn *l* in $\mathbb{R}^3$ die evenwijdig is met een vlak *V* snijdt dan het vlak *V* in een oneindig ver punt, namelijk het oneindig verre punt van alle lijnen in *V* die evenwijdig zijn met lijn *l*. De oneindig verre punten van de lijnen in *V* vormen de oneindig verre lijn van vlak *V*. Een vlak, uitgebreid met zijn oneindig verre lijn, wordt een projectief vlak genoemd. Twee vlakken in $\mathbb{R}^3$ zijn evenwijdig precies dan, wanneer ze dezelfde oneindig verre lijn hebben. De projectie vanuit *O* van het projectieve vlak *V* op het projectieve vlak V' is nu een omkeerbare afbeelding van het projectieve vlak *V* op het projectieve vlak V', waarbij lijnen worden afgebeeld op lijnen. De oneindig verre lijn van vlak *V* hoeft hierbij niet te corresponderen met de oneindig verre lijn van vlak V' . [Dit laatste is wel het geval als de vlakken *V* en V' evenwijdig zijn.] Verhoudingen $AC : BC$ van drie verschillende punten die op een lijn liggen blijven bij projectie i.h.a. niet behouden. Wel blijven onder een projectie dubbelverhoudingen $(ABCD)$ van vier verschillende punten op een lijn behouden. Zie de hoofdstukken 4 en 9.

Een punt *X* in $\mathbb{R}^2$ is een getallenpaar (x, y) . Een punt *X* in $\mathbb{R}^3$ is een getallendrietal (x, y, z) . Wanneer we $\mathbb{R}$ beschouwen als een lijn, dan noemen we een getal *x* ook wel een punt van $\mathbb{R}$. De term 'elementair' in de titel 'Elementaire Meetkunde' van dit boek slaat o.a. op het feit dat in de hoofdstukken 1 t/m 12 geen limieten gebruikt worden, dus ook niet eigenschappen die op limieten berusten, zoals continuïteit, differentieerbaarheid of integralen. De lengte van een cirkelboog kan niet gedefinieerd worden. In $\cos\alpha$ of $\sin\alpha$ stelt α dan ook niet een getal, maar een hoek voor.

Dit alles betekent dat we in de hoofdstukken 1 t/m 12 alleen maar gebruik maken van de volgende eigenschappen van de reële getallen.

De reële getallen kunnen we optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen volgens de bekende rekenregels. Als x en y twee verschillende reële getallen zijn, dan $x < y$ of $x > y$, maar niet beide. De reële getallen bevatten de getallen 0 en 1, waarvoor geldt $0 < 1$. Als $x > 0$, dan is x positief. Als $x < 0$, dan is x negatief. Als $x < y,\ y < z$, dan $x < z$. Als $x < y$, dan $x + z < y + z$. Als $x < y$ en $z > 0$, dan $x \cdot z < y \cdot z$. Kortom $\mathbb{R}$ is met deze bewerkingen en ordening een wiskundige structuur, die bekend staat als een *geordend lichaam*. $\mathbb{R}$ bevat ook kleinere deellichamen met deze eigenschappen. Bijv. $\mathbb{Q}$, de verzameling van de rationale getallen, is zo'n deellichaam. Een flink deel van de stellingen in de hoofdstukken 1 t/m 12 behoudt zijn geldigheid, wanneer we overal $\mathbb{R}$ zouden vervangen door $\mathbb{Q}$.

Dat is niet meer het geval bij stellingen die betrekking hebben op lengtes of afstanden. Voor de definitie en berekening van afstanden hebben we wortels nodig. De afstand $|AB|$ van twee punten $A(a_1, a_2)$ en $B(b_1, b_2)$ wordt gedefinieerd door

$$|AB| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}\ .$$

In $\mathbb{R}^3$ wordt $|AB|$ voor punten $A(a_1, a_2, a_3)$ en $B(b_1, b_2, b_3)$ gegeven door

$$|AB| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}\ .$$

Als $x, y \geq 0$, dan $y = \sqrt{x} \ \Leftrightarrow\ y^2 = x$.

Een deelverzameling L van $\mathbb{R}$ met de volgende eigenschappen heet een *euclidisch deellichaam* van $\mathbb{R}$:

(i) L bevat de getallen 0 en 1.

(ii) Als $x, y \in L$, dan ook behoren ook $x + y$, $x - y$, $x \cdot y$ tot L.

(iii) Als $x, y \in L$ en $y \neq 0$, dan behoort ook x / y tot L.

(iv) Als $x \in L$ en $x > 0$, dan behoort ook $\sqrt{x}$ tot L.

Ieder deellichaam van $\mathbb{R}$ is automatisch geordend door de ordening '$<$' van $\mathbb{R}$.

We definiëren $\mathbb{K}$ als het kleinste euclidische deellichaam van $\mathbb{R}$. Ga na dat in ieder geval $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$ [d.w.z. $\mathbb{Q}$ is een deelverzameling van $\mathbb{K}$]. Maar $\mathbb{K}$ valt niet samen met $\mathbb{Q}$. Bijv. $\sqrt{2}$ is niet een rationaal getal. $\mathbb{K}$ valt ook niet samen met $\mathbb{R}$, maar dat is wat moeilijker te bewijzen. Bijv. $\sqrt[3]{2}$ hoort niet tot $\mathbb{K}$. [Maar wel hoort $\sqrt[4]{2}$ tot $\mathbb{K}$, want $\sqrt{2}$ is positief en $\sqrt[4]{2} = \sqrt{\sqrt{2}}$.]

Er geldt:

$x \in \mathbb{K} \Leftrightarrow x$ behoort tot ieder euclidisch deellichaam van $\mathbb{R}$.

$\mathbb{K}$ wordt gekarakteriseerd door:

$x \in \mathbb{K} \Leftrightarrow$ er is een rij $r_1, r_2, ..., r_n$ van getallen in $\mathbb{R}$ zo dat $x = r_n$ en voor ieder getal r_k in de rij geldt

$r_k \in \mathbb{Q}$ of $r_k = r_i + r_j$, met $i, j < k$, of $r_k = r_i \cdot r_j$, met $i, j < k$,

of $r_k = 1/r_i$, met $i < k$, $r_i \neq 0$, of $r_k = \sqrt{r_i}$, met $i < k$ en $r_i > 0$.

Hieruit blijkt dat $\mathbb{K}$, in tegenstelling tot $\mathbb{R}$, een aftelbaar aantal getallen bevat. De positieve getallen in $\mathbb{K}$ zijn de reële getallen die de lengte voorstellen van een lijnstuk, dat met behulp van passer en liniaal in een eindig aantal stappen construeerbaar is, wanneer een lijnstuk met lengte 1 gegeven is. Al sinds de Griekse Oudheid gelden voor zulke constructies bepaalde regels. Bij de klassieke passer- en liniaalconstructies mag de liniaal alleen maar gebruikt worden om een lijn door twee gegeven of reeds eerder geconstrueerde punten te trekken, de liniaal bevat geen maatindeling. De passer mag alleen gebruikt worden om een cirkel te tekenen met een gegeven of reeds eerder geconstrueerd punt als middelpunt en met een straal die gelijk is aan de afstand van twee gegeven of eerder geconstrueerde punten. Ook de passer bevat geen maatindeling. We noemen de getallen in $\mathbb{K}$ de *construeerbare getallen*. $\mathbb{K}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{K}\}$ is dan het *construeerbare vlak* en $\mathbb{K}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{K}\}$ is de *construeerbare ruimte*.

Alle stellingen in de hoofdstukken 1 t/m 12 behouden hun geldigheid, wanneer we overal $\mathbb{R}$ zouden vervangen door $\mathbb{K}$. We noemen de meetkunde in deze hoofdstukken daarom 'elementaire' meetkunde.

In de hoofdstukken 13 en 14 van dit boek schetsen we nog wat er mogelijk is, wanneer we alle eigenschappen van de reële getallen mogen benutten. We bedrijven dan meetkunde met behulp van begrippen en methoden uit de Analyse. Dit is Analytische Meetkunde in de ware zin van het woord.

Rinse Poortinga

Elementaire meetkunde

1 Het vlak $\mathbb{R}^2$ ……. 1

1.1 Lineaire afbeeldingen en determinanten. 1
1.2 Translaties en affiene afbeeldingen. 5
1.3 Lijnen in $\mathbb{R}^2$. 9
1.4 Verhoudingen van evenwijdige translaties en pijlen. 13
1.5 Bijzondere lijnen bij driehoeken. 19

2 Gelijkvormigheid en congruentie …… 23

2.1 Inwendig product. 23
2.2 Driehoeken en loodlijnen. 30
2.3 De (georiënteerde) oppervlakte van een driehoek. 35
2.4 Spiegelen t.o.v. een lijn. 39

3 Hoeken …… 44

3.1 Hoeken. 44
3.2 Georiënteerde hoek. 54
3.3 Rotaties. 59
3.4 Congruente en gelijkvormige driehoeken. 64
3.5 De georiënteerde hoek tussen twee lijnen. 66
3.6 Omtrekshoeken en cirkelbogen. 69
3.7 Koordenvierhoeken. 72
3.8 De macht van een punt t.o.v. een cirkel. 75
3.9 Inversie t.o.v. een cirkel. 77

4 Projectie en dubbelverhouding …….. 85

4.1 Behoud van dubbelverhouding bij projecties. 85
4.2 (Harmonisch) scheiden. 92
4.3 De stelling van Pascal voor een cirkel. 98
4.4 De stelling van Pappus. 100
4.5 Projectiviteiten. 101
4.6 De dubbelverhouding bij inversie. 113

5 Kegelsneden en de stelling van Pascal …… 117

5.1 Kegelsneden. 117
5.2 De kegelsnede door vijf verschillende punten. 125
5.3 Raaklijnen aan een kegelsnede. 128
5.4 De stelling van Pascal. 130
5.5 Meer projectiviteiten. 134

6 Projectieve transformaties ……... 138

6.1 Projectieve transformaties van het projectieve vlak. 138
6.2 Dekpunten en invariante lijnen. 144
6.3 Homologieën. 147
6.4 Kegelsneden onder projectieve transformaties. 151
6.5 De involutiestelling van Desargues. 154
6.6 Pool en poollijn t.o.v. een kegelsnede. 157
6.7 Een affiene classificatie van de kegelsneden. 159
6.8 Kegelsneden met een middelpunt. 162

7 Meetkunde in $\mathbb{R}^3$ …… 164

7.1 Lineaire afbeeldingen en determinanten. 164
7.2 Translaties, pijlen en affiene afbeeldingen. 172
7.3 Lijnen en vlakken in $\mathbb{R}^3$. 175
7.4 Inwendig product en loodrechte stand. 186
7.5 Lengtes, afstanden en hoeken. 189
7.6 Multilineaire functies en afbeeldingen. 194

8 Oriëntatie en isometrieën …… 199

8.1 Oriëntatie van een vlak in $\mathbb{R}^3$. 199
8.2 Viervlakken en bollen. 202
8.3 Congruenties en gelijkvormigheden van $\mathbb{R}^3$. 206
8.4 Spiegelen t.o.v. een vlak. 209
8.5 Vlakke figuren. 214
8.6 Samenstellen van spiegelingen. 217
8.7 De inhoud van een blok. 222
8.8 De inhoud van een simplex. 227

9 Projecties ……..…. 229

9.1 Parallelprojectie van $\mathbb{R}^3$ op een vlak. 229
9.2 Centrale projectie van $\mathbb{R}^3$ op een vlak. 231
9.3 Projectie van een vlak op een vlak. 234
9.4 Projectieve lijnen en vlakken. 238
9.5 Kegelsneden in projectieve vlakken. 242
9.6 Kegels en bollen. 245
9.7 Inverteren t.o.v. een bol. 249
9.8 Nogmaals projectiviteiten tussen vlakken. 254

10 Projectieve vlakke meetkunde …..…….. 258

10.1 Het projectieve vlak $\mathcal{P}$. 258
10.2 De stelling van Desargues en zijn omgekeerde. 263
10.3 Projectieve transformaties van $\mathcal{P}$. 264
10.4 De dubbelverhouding op een lijn. 267
10.5 De dubbelverhouding in een lijnenwaaier. 271
10.6 Dualiteit. 274
10.7 Een volledige vierhoek. 279

11 Kegelsneden in het projectieve vlak ……..…. 282

11.1 Kegelsneden in $\mathcal{P}$. 282
11.2 De kegelsnedenbundel door de hoekpunten van een vierhoek. 286
11.3 Een parametervoorstelling van een kegelsnede. 291
11.4 De stellingen van Pascal en Pappus. 293
11.5 Een andere notatie voor de kegelsnede. 298
11.6 Raaklijnen en poollijnen bij een niet-ontaarde kegelsnede. 300
11.7 Duale kegelsneden. 305
11.8 Negenpuntskegelsnede. 311

12 Oneindig verre punten …….. 314

12.1 Gewone punten en oneindig verre punten. 314
12.2 Affiene en projectieve transformaties. 318
12.3 Kegelsneden. 321
12.4 Kegelsneden met een middelpunt. 324
12.5 Metrische eigenschappen van de kegelsneden in $\mathbb{R}^2$. 326
12.6 $\mathbb{R}^3$ met oneindig verre punten uitbreiden tot de projectieve ruimte $\mathcal{R}$. 332

13 Meetkunde met Analyse in $\mathbb{R}^2$ …… 338

13.1 Wat is elementaire meetkunde. 338
13.2 Continue en differentieerbare functies. 343
13.3 Integralen. 347
13.4 Riemannsommen. 349
13.5 Bewegingen langs een kromme in $\mathbb{R}^2$. 352
13.6 De goniometrische functies als $\mathbb{R}$-$\mathbb{R}$-functies. 356
13.7 Een goniometrische parametervoorstelling van de eenheidscirkel. 358
13.8 De oppervlakte van de eenheidscirkel. 361
13.9 De oppervlakte van enkele speciale gebieden in $\mathbb{R}^2$. 362
13.10 De oriëntatie van een parametrisering t.o.v. een gebied in $\mathbb{R}^2$. 367

14 Inhoud en oppervlakte in $\mathbb{R}^3$…… 370

14.1 Inhouden. 370
14.2 De oppervlakte van een omwentelingsoppervlak. 374
14.3 Parametervoorstelling van krommen en oppervlakken. 376
14.4 Oppervlakte van een geparametriseerd oppervlak. 381

Literatuur …….. 387

Index …… 389

Het vlak $\mathbb{R}^2$

We gaan uit van een vlak, waarin ieder punt X voorzien is van een uniek coördinatenpaar (x, y) met $x, y \in \mathbb{R}$. Na het invoeren van coördinaten vatten we dit vlak op als de verzameling die bestaat uit de getallenparen (x, y) met $x, y \in \mathbb{R}$. M.a.w. we identificeren het vlak met $\mathbb{R}^2$. De elementen van $\mathbb{R}^2$ noemen we *punten*. De eerste en de tweede coördinaat van een punt wordt de x-*coördinaat* resp. y-*coördinaat* van dat punt genoemd. De *x-as* bestaat uit de punten $(x,0)$, de *y-as* bestaat uit de punten $(0, y)$. De x-as en de y-as heten de *coördinaatassen* van $\mathbb{R}^2$. We stellen ons de x-as voor als een horizontale lijn en de y-as als een verticale lijn. De x-as en y-as snijden elkaar in het punt O met coördinaten $(0,0)$. O heet de *oorsprong* van het assenstelsel. Punten duiden we aan met hoofdletters en het is dan vaak handig om de bijbehorende coördinaten aan te duiden met de corresponderende kleine letters voorzien van indices 1 en 2. Dat geeft notaties als $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, …, $X(x_1, x_2)$, etc.

1.1 Lineaire afbeeldingen en determinanten.

De *lineaire bewerkingen* van $\mathbb{R}^2$ zijn de *coördinaatsgewijze optelling*:

$$X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

en het *scalair product* $tX = (tx_1, tx_2)$ van een getal $t \in \mathbb{R}$ en een punt X. We schrijven $-1X$ als $-X$ en $X + (-Y)$ als $X - Y$. Met deze lineaire bewerkingen is $\mathbb{R}^2$ een *tweedimensionale lineaire ruimte*. De *standaardbasis* van $\mathbb{R}^2$ is (E_1, E_2) met $E_1(1,0)$ en $E_2(0,1)$.

Definitie. Een *lineaire afbeelding* L van $\mathbb{R}^2$ naar zichzelf wordt gegeven door

$$L(X) = x_1 P + x_2 Q .$$

Ga na dat $P = L(E_1)$ en $Q = L(E_2)$. We noteren L ook als $L = [P, Q]$ of met een 2×2 -matrix als

$$L = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{bmatrix}.$$

In de eerste kolom van de matrix staan de coördinaten van P onder elkaar en in de tweede kolom de coördinaten van Q. Verder geldt $L(X + Y) = L(X) + L(Y)$ en $L(tX) = tL(X)$, d.w.z. L respecteert de lineaire bewerkingen. I.h.b. geldt $L(O) = O$.

Zijn $M=[A,B]$ en $L=[P,Q]$ lineaire afbeeldingen van $\mathbb{R}^2$, dan wordt de samenstelling $M\circ L$ gedefinieerd door

$$(M\circ L)(X)=M(L(X)).$$

Eerst wordt L uitgevoerd, daarna M. $M\circ L$ is weer een lineaire afbeelding van $\mathbb{R}^2$.

Ga na dat

$$M\circ L=[M(P),M(Q)]=[p_1A+p_2B,q_1A+q_2B].$$

Ook $L\circ M$ is een lineaire afbeelding [van $\mathbb{R}^2$, maar dat zeggen we er voortaan meestal niet meer bij]. Ga na dat i.h.a. $M\circ L\neq L\circ M$.

De *determinant* van $L=[P,Q]$ wordt genoteerd als $\det(L)$ en ook als

$$\det(P,Q) \text{ of als } \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix},$$

met de coördinaten van P en Q tussen verticale strepen.

Definitie. $\det(L)=\det(P,Q)=\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix}=p_1q_2-p_2q_1.$

Toon aan: $\det(P+R,Q)=\det(P,Q)+\det(R,Q)$,

$\det(tP,Q)=t\cdot\det(P,Q)$ en

$\det(Q,P)=-\det(P,Q)$.

Als $P\neq O$, dan $\det(P,Q)=0\Leftrightarrow Q=tP$ voor zekere t.

Als $\det(P,Q)=0$, dan noemen we P en Q *lineair afhankelijk*. Dat betekent dat P en Q op een lijn door O liggen. Als $\det(P,Q)\neq 0$, dan zijn P en Q *lineair onafhankelijk*.

1.1.1 Als $M=[A,B]$ en $L=[P,Q]$ lineaire afbeeldingen zijn, dan

$$\det(M\circ L)=\det(M)\cdot\det(L).$$

Bewijs. $\det(M\circ L)=\det(M(P),M(Q))=\det(p_1A+p_2B,q_1A+q_2B)$.

Uitwerken met bovengenoemde rekenregels geeft

$$\det(M\circ L)=(p_1q_2-p_2q_1)\cdot\det(A,B)=\det(P,Q)\cdot\det(A,B).$$

Een belangrijke eigenschap van de determinant wordt gegeven door:

1.1.2 Bij ieder punt Y zijn er uniek bepaalde getallen x_1 en x_2 zo dat $Y = x_1P + x_2Q$ precies dan, wanneer $\det(P,Q) \neq 0$,

Voor een lineaire afbeelding $L = [P,Q]$ betekent $\det(L) \neq 0$ dat er bij iedere Y een uniek punt X bestaat zo dat $Y = L(X)$. Dat houdt in dat L omkeerbaar is. De inverse afbeelding M wordt gedefinieerd door $M(Y) = X \Leftrightarrow L(X) = Y$. Is M de inverse van L, dan noteren we M als L^{-1}.

1.1.3 De lineaire afbeelding $L = [P,Q]$ is omkeerbaar precies dan, wanneer $\det(L) \neq 0$. De inverse afbeelding L^{-1} is dan ook weer een lineaire afbeelding.

Een omkeerbare afbeelding van $\mathbb{R}^2$ op zichzelf noemen we een *transformatie* van $\mathbb{R}^2$. Dus een lineaire afbeelding L van $\mathbb{R}^2$ is een lineaire transformatie van $\mathbb{R}^2$ precies dan, wanneer $\det(L) \neq 0$. Uit 1.1.1 volgt dat het achter elkaar uitvoeren van lineaire transformaties weer een lineaire transformatie oplevert. De lineaire transformaties van $\mathbb{R}^2$ vormen een *transformatiegroep*, d.w.z. is L een lineaire transformatie, dan is ook zijn inverse L^{-1} een lineaire transformatie. $L^{-1}(L(X)) = X$ voor iedere $X \in \mathbb{R}^2$. Dus $L^{-1} \circ L = I$, waarin I de *identieke transformatie* van $\mathbb{R}^2$ is. $I(X) = X$ voor ieder punt X. I is een lineaire transformatie. De matrix van I is

$$I = [E_1, E_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ en } \det(I) = 1.$$

Uit 1.1.1 volgt

$$\det(L^{-1} \circ L) = \det(L^{-1}) \cdot \det(L) = \det(I) = 1, \text{ dus } \det(L^{-1}) = 1 / \det(L).$$

Zijn F en G twee afbeeldingen van $\mathbb{R}^2$ naar zichzelf, dan is $G \circ F$ de afbeelding die gedefinieerd wordt door $(G \circ F)(X) = G(F(X))$ voor iedere $X \in \mathbb{R}^2$. In $G(F(X))$ wordt eerst F uitgevoerd en daarna G. I.h.a. zijn $G \circ F$ en $G \circ F$ niet dezelfde afbeeldingen. Wel geldt $(H \circ G) \circ F = H \circ (G \circ F)$, want

$$((H \circ G) \circ F)(X) = (H \circ (G \circ F))(X) = H(G(F(X))).$$

Definitie. Een verzameling $\mathcal{G}$ van transformaties van $\mathbb{R}^2$ is een *transformatiegroep* van $\mathbb{R}^2$, als met F en G ook $G \circ F$ en F^{-1} tot $\mathcal{G}$ behoren. We veronderstellen dat $\mathcal{G}$ niet leeg is.

Stel $Y = L(X)$ met $L = [P,Q]$ en $\det(L) \neq 0$. Dan $X = L^{-1}(Y)$.

We kunnen matrix van L^{-1} bepalen met behulp van de volgende stelling:

1.1.4 *Regel van Kramer.* Als $\det(P,Q) \neq 0$, dan

$$Y = x_1 P + x_2 Q \;\Leftrightarrow\; x_1 = \frac{\det(Y,Q)}{\det(P,Q)} \text{ en } x_2 = \frac{\det(P,Y)}{\det(P,Q)}.$$

Dus $X = L^{-1}(Y)$ met $L^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{q_2}{\det(P,Q)} & \frac{-q_1}{\det(P,Q)} \\ \frac{-p_2}{\det(P,Q)} & \frac{p_1}{\det(P,Q)} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(P,Q)} \cdot \begin{bmatrix} q_2 & -q_1 \\ -p_2 & p_1 \end{bmatrix}$.

Bewijs. Als $Y = x_1 P + x_2 Q$, dan

$$\det(Y,Q) = \det(x_1 P + x_2 Q, Q) = x_1 \cdot \det(P,Q) \text{ en}$$

$$\det(P,Y) = \det(P, x_1 P + x_2 Q) = x_2 \cdot \det(P,Q).$$

1.2 Translaties en affiene afbeeldingen.

Definitie. Een *translatie* F van $\mathbb{R}^2$ is een transformatie van $\mathbb{R}^2$ die wordt gegeven door $F(X) = X + P$.

Een translatie wordt ook een *verschuiving* genoemd. Bij de translatie $F(X) = X + P$ wordt punt O afgebeeld op punt P en alle andere punten in het vlak schuiven daarbij mee in de richting en over de afstand die wordt aangeven door een pijl met beginpunt O en eindpunt P.

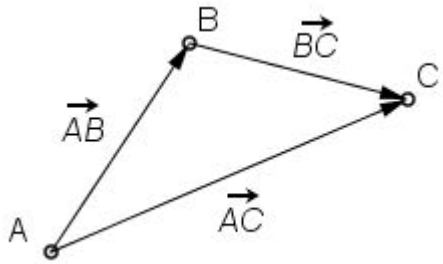
1.2.1 Bij twee punten A en B is er precies één translatie F van $\mathbb{R}^2$ die A afbeeldt op B en dat is de translatie $F(X) = X + (B - A)$. We noteren deze translatie als $\overrightarrow{AB}$.

1.2.2 Voor translaties $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{CD}$ geldt $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow B - A = D - C$.

Ga na dat $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Definitie. De translaties $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{CD}$ met $A \neq B$, $C \neq D$ zijn *gelijkgericht*, wanneer er een $t > 0$ is zo dat $C - D = t(B - A)$. Ze zijn *tegengesteld gericht*, als $C - D = t(B - A)$ met $t < 0$.

Het na elkaar uitvoeren van translaties is weer een translatie. De translatie $\overrightarrow{AB}$ gevolgd door de translatie $\overrightarrow{BC}$ is de translatie $X \mapsto X + (B - A) + (C - B) = X + (C - A)$ ofwel $\overrightarrow{AC}$. De volgorde waarin we de translaties $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{BC}$ uitvoeren maakt geen verschil. We noteren het resultaat als $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, dus $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.



De translatie $X \mapsto X + P$ is de translatie $\overrightarrow{OP}$. De identieke transformatie $X \mapsto X$, die ieder punt op zichzelf afbeeldt, is de translatie $\overrightarrow{OO}$. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{OO}$, dus translatie $\overrightarrow{BA}$ is de inverse van translatie $\overrightarrow{AB}$. We noteren dit als $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ en schrijven $\overrightarrow{PQ} + -\overrightarrow{AB}$ korter als $\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{AB}$. De translaties van $\mathbb{R}^2$ vormen een transformatiegroep van $\mathbb{R}^2$. We kunnen een translatie $\overrightarrow{AB}$ ook nog met een getal t vermenigvuldigen: $t \cdot \overrightarrow{AB}$ is de translatie $X \mapsto X + t(B - A)$.

Met de optelling en het product van een getal $t \in \mathbb{R}$ en een translatie vormen de translaties van $\mathbb{R}^2$ een lineaire ruimte met dezelfde wiskundige structuur als $\mathbb{R}^2$ zelf. Dat wordt direct duidelijk als we deze translaties in de vorm $\overrightarrow{OX}$ schrijven. Dan

$$\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OZ} \Leftrightarrow X + Y = Z \text{ en}$$

$$t \cdot \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OY} \Leftrightarrow t \cdot X = Y .$$

Pijlen en vectoren. De translatie $F(X) = X + (B - A)$ beeldt punt *A* af op punt *B*. Alle andere punten schuiven daarbij mee in de richting en over de afstand die wordt aangegeven door de pijl met beginpunt *A* en eindpunt *B*.

Een *pijl met beginpunt A en eindpunt B* definiëren we als een geordend puntenpaar (A, B) en we noteren dit puntenpaar meer suggestief als $\overrightarrow{AB}$. Voor pijlen $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{CD}$ geldt $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow A = C$ en $B = D$. De notatie $\overrightarrow{AB}$ wordt ook voor de bijbehorende translatie $F(X) = X + (B - A)$ gebruikt. Voor translaties $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{CD}$ geldt $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow B - A = D - C$. Of met $\overrightarrow{AB}$ de pijl of de translatie bedoeld wordt, moet blijken uit de context. Misverstand wordt voorkomen door het gebruik van de volledige omschrijving *pijl* $\overrightarrow{AB}$ resp. *translatie* $\overrightarrow{AB}$. We schrijven $\overrightarrow{AB}$ zonder meer als we in een bewering of een definitie $\overrightarrow{AB}$ zowel als een pijl of als een translatie mogen opvatten.

Net als voor translaties stellen we nu:

Definitie. De pijlen $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{CD}$ met $A \neq B$, $C \neq D$ zijn *gelijkgericht*, wanneer er een $t > 0$ is zo dat $C - D = t(B - A)$. Ze zijn *tegengesteld gericht*, als $C - D = t(B - A)$ met $t < 0$. De pijlen $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{CD}$ zijn *even lang*, als $C - D = t(B - A)$ met $t = \pm 1$.

Een pijl $\overrightarrow{OX}$ met beginpunt *O* wordt een *vector* genoemd. Een vector is eenduidig bepaald door zijn eindpunt *X* en wordt ook aangeduid met de corresponderende kleine onderstreepte letter $\underline{x}$. Dus $\underline{a} = \overrightarrow{OA}$, $\underline{b} = \overrightarrow{OB}$, ... , etc.

Opmerking. Voor vectoren $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \ldots$ worden ook vaak vette letters **a**, **b**, **c**, … of kleine letters $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ met een pijltje erboven gebruikt. Vette letters zijn niet handig bij geschreven tekst. Wij geven de voorkeur aan het streepje onder de letter.

De optelling van vectoren en het vermenigvuldigen van een vector met een getal wordt op voor de hand liggende wijze gedefinieerd door

$$\underline{x} + \underline{y} = \underline{z} \Leftrightarrow X + Y = Z \text{ en}$$

$$t \cdot \underline{x} = \underline{y} \Leftrightarrow t \cdot X = Y .$$

Met deze bewerkingen vormen de vectoren een *vectorruimte* met dezelfde wiskundige structuur als $\mathbb{R}^2$. In deze vectorruimte is $\underline{o} = \overrightarrow{OO}$ de *nulvector* en $\underline{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$, $\underline{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$ zijn de *standaardbasisvectoren*.

Ga na dat de pijl $\overrightarrow{AB}$ en de vector $\underline{b} - \underline{a}$ even lang zijn en dezelfde richting hebben.

De verzameling van alle pijlen $\overrightarrow{AX}$ met een vast beginpunt A wordt een *pijlenruimte* met dezelfde wiskundige structuur als $\mathbb{R}^2$, wanneer we daarin de optelling en de vermenigvuldiging met een getal definiëren d.m.v.

$$\overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{AY} \Leftrightarrow Z - A = (X - A) + (Y - A) \text{ en}$$

$$\overrightarrow{AY} = t \cdot \overrightarrow{AX} \Leftrightarrow Y - A = t(X - A).$$

Opmerking. Er geldt $-1 \cdot \overrightarrow{AX} = -\overrightarrow{AX}$. Dit is de pijl met beginpunt A die even lang is als pijl $\overrightarrow{AX}$, maar tegengesteld gericht. Anders dan bij translaties schrijven we de pijl $-\overrightarrow{AX}$ niet als $\overrightarrow{XA}$, want dat is een pijl met beginpunt X en eindpunt A. We schrijven $\overrightarrow{AX} + (-\overrightarrow{AY})$ korter als $\overrightarrow{AX} - \overrightarrow{AY}$. Er geldt $\overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{AX} - \overrightarrow{AY}$ precies dan, wanneer $\overrightarrow{AZ} + \overrightarrow{AY} = \overrightarrow{AX}$.

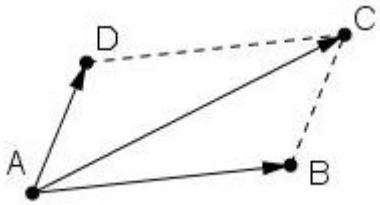
Definitie. Vier verschillende punten A, B, C en D zijn de *hoekpunten* van het *parallellogram ABCD*, als $A + C = B + D$.

[Het is mogelijk dat de punten A, B, C en D op één lijn liggen. Het parallellogram is dan *ontaard*.]

Opgave. *ABCD* is een parallellogram precies dan, als de pijlen $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{DC}$ gelijkgericht en even lang zijn.

Opgave. *ABCD* is een [mogelijk ontaard] parallellogram precies dan, als

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$$



We breiden de definitie van de determinant uit tot translaties en pijlen:

Definitie. $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \det(B - A, D - C)$.

Definitie. Een *affiene* afbeelding van $\mathbb{R}^2$ is een lineaire afbeelding van $\mathbb{R}^2$ gevolgd door een translatie.

Een affiene afbeelding F [van $\mathbb{R}^2$, maar dat zeggen we er niet steeds bij] is een afbeelding die gegeven wordt door

$$F(X) = L(X) + R = x_1 P + x_2 Q + R\,,$$

waarin $L = [P,Q]$ het *lineaire deel* van F is en $X \mapsto X + R$ de translatie $\overrightarrow{OR}$. F is omkeerbaar precies dan, wanneer L omkeerbaar is ofwel $\det(L) = \det(P,Q) \neq 0$. Een translatie is sowieso omkeerbaar. Als $\det(L) \neq 0$, dan is F een affiene transformatie. We krijgen de inverse van de affiene transformatie $F(X) = L(X) + R$ door eerst de translatie $X \mapsto X - R$ en daarna L^{-1} uit te voeren. Dus

$$F^{-1}(X) = L^{-1}(X - R) = L^{-1}(X) - L^{-1}(R)\,,$$

waaruit blijkt dat ook F^{-1} een affiene transformatie is. Toon aan dat twee affiene transformaties na elkaar uitgevoerd weer een affiene transformatie op leveren.

1.2.3 De affiene transformaties vormen een transformatiegroep. De lineaire transformaties vormen een ondergroep van de affiene transformaties. Ook de translaties vormen een ondergroep van de affiene transformaties.

Een affiene transformatie $F(X) = L(X) + R$ is lineair precies dan, als $F(O) = O$ ofwel $R = O$. $F(X) = L(X) + R$ is een translatie, als $L = I$ [de identieke transformatie] ofwel $L(X) = X$ voor iedere X uit $\mathbb{R}^2$.

De verzameling van de pijlen in $\mathbb{R}^2$ met eenzelfde beginpunt A is een lineaire ruimte met dezelfde wiskundige structuur als $\mathbb{R}^2$ zelf. Pijl $\overrightarrow{AA}$ vervult hierin de rol van de oorsprong. Een affiene afbeelding F van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}^2$ induceert een afbeelding $\tilde{F}$ van de pijlen met beginpunt A op de pijlen met beginpunt $F(A)$ d.m.v.

$$\tilde{F}(\overrightarrow{AX}) = \overrightarrow{F(A)F(X)}\,.$$

We noteren de geïnduceerde afbeelding $\tilde{F}$ simpelweg als F. Ga na dat

$$F(\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{AY}) = F(\overrightarrow{AX}) + F(\overrightarrow{AY}) \text{ en } F(t \cdot \overrightarrow{AX}) = t \cdot F(\overrightarrow{AX})\,,$$

m.a.w. de geïnduceerde afbeelding is lineair. Als $F(A) = A$, dan is F een lineaire afbeelding van de pijlenruimte met beginpunt A naar zichzelf. Dit geldt i.h.b. voor de vectorruimte die bestaat uit de vectoren $\underline{x} = \overrightarrow{OX}$ met $X \in \mathbb{R}^2$.

1.3 Lijnen in $\mathbb{R}^2$.

Definitie. De *lijn AB* met $A \neq B$ bestaat uit de punten X zo dat $X = A + t(B - A)$ voor zekere $t \in \mathbb{R}$.

Merk op dat $X = A + t(B - A) \Leftrightarrow \overrightarrow{AX} = t \cdot \overrightarrow{AB}$.

Met $t = 0$ krijgen we punt A, met $t = 1$ krijgen we punt B en met $t = \frac{1}{2}$ krijgen we punt $X = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = \frac{1}{2}(A + B)$, het *midden* van lijnstuk AB. Het *lijnstuk* AB bestaat uit de punten $X = A + t(B - A)$ met $0 \leq t \leq 1$. Een punt $X = A + t(B - A)$ met $0 < t < 1$ ligt *tussen* A en B. We noemen $X = A + t(B - A)$ een *parametervoorstelling* van lijn AB met *parameter t*.

Afspraak. Wanneer we het over *lijn AB* hebben, dan veronderstellen we stilzwijgend dat $A \neq B$.

1.3.1 Door twee verschillende punten gaat precies één lijn.

De parametervoorstelling $X = A + t(B - A)$ is in feite een 1-1-correspondentie $\varphi(t) = X$ die punt $X = A + t(B - A)$ op de lijn koppelt aan het getal $t \in \mathbb{R}$. Afbeelding φ is afhankelijk van de keus van de punten A en B. Kiezen we andere punten C en D op lijn AB, dan krijgen we de parametervoorstelling $\psi(u) = Y = C + u(D - C)$. Er zijn dan getallen $p \neq 0$ en q zo dat $Y = X \Leftrightarrow u = pt + q$.

1.3.2 Zijn $X = A + t(B - A)$ en $Y = C + u(D - C)$ twee parametervoorstellingen van dezelfde lijn, dan zijn er getallen $p \neq 0$ en q zo dat $Y = X \Leftrightarrow u = pt + q$.

Bewijs. Stel C en D zijn twee verschillende punten op lijn $X = A + t(B - A)$. Dan

$$C = A + c(B - A) \text{ en } D = A + d(B - A)$$

voor zekere c en d met $c \neq d$. Als $Y = C + u(D - C)$, dan

$$X = Y \Leftrightarrow A + t(B - A) = C + u(D - C) = (A + c(B - A)) + u(d - c)(B - A)$$

$$= A + (u(d - c) + c)(B - A) \Leftrightarrow t = u(d - c) + c \Leftrightarrow u = \frac{t - c}{d - c}.$$

We kunnen $u = \frac{t - c}{d - c}$ schrijven als $u = pt + q$ met $p = \frac{1}{d - c}$ en $q = \frac{-c}{d - c}$.

1.3.3 Een punt X ligt op lijn $AB \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AX}) = \det(B - A, X - A) = 0$.

Bewijs. Punt X ligt op lijn AB precies dan, wanneer

$$X = A + t(B - A) \text{ ofwel } X - A = t(B - A) \text{ voor zekere } t.$$

Uit de eigenschappen van determinanten volgt

$$X \text{ ligt op lijn } AB \Leftrightarrow \det(B-A,\ X-A)=0\,.$$

We noemen $\det(B-A,\ X-A)=\det(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AX})=0$ een *vergelijking van lijn AB*.
In coördinaten

$$\det(B-A,\ X-A)=\begin{vmatrix} b_1-a_1 & x_1-a_1 \\ b_2-a_2 & x_2-a_2 \end{vmatrix}=0$$

ofwel

$$(b_1-a_1)(x_2-a_2)-(b_2-a_2)(x_1-a_1)=0\,.$$

Equivalent:

$$(b_2-a_2)x_1-(b_1-a_1)x_2+(a_1b_2-a_2b_1)=0\,.$$

Dus:

1.3.4 $p_1x_1+p_2x_2+p_3=0$ is 'de' vergelijking van een lijn, als p_1 en p_2 niet beide gelijk aan 0 zijn. Vermenigvuldigen we p_1, p_2, p_3 allemaal met hetzelfde getal $r\neq 0$, dan krijgen we een vergelijking van dezelfde lijn.

Als we in het volgende $p_1x_1+p_2x_2+p_3=0$ de vergelijking van een lijn noemen, dan veronderstellen we stilzwijgend dat p_1 en p_2 niet beide gelijk aan 0 zijn. Lijnen worden vaak aangeduid met kleine letters *k*, *l*, *m*. I.p.v. x_1 en x_2 gebruiken we in overeenstemming met de traditie ook vaak *x* en *y* voor de variabelen in de vergelijking van een lijn en schrijven dan $p_1x+p_2y+p_3=0$ i.p.v. $p_1x_1+p_2x_2+p_3=0$.

Definitie. Evenwijdig. Twee lijnen *k* en *l* zijn *evenwijdig*, notatie $k\parallel l$, wanneer $k=l$ of wanneer *k* en *l* geen punt gemeen hebben. Wanneer de lijnen *AB* en *CD* evenwijdig zijn, dan zijn ook de lijnstukken *AB* en *CD* en de translaties of pijlen $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{CD}$ evenwijdig.

Als de lijnen *k* en *l* niet evenwijdig zijn, dan hebben *k* en *l* precies één punt gemeen, het *snijpunt* van beide lijnen. We noemen dan *k* en *l* *snijdende* lijnen.

Toon aan:

1.3.5 De lijnen *AB* en *CD* zijn evenwijdig precies dan, wanneer voor zekere $t\in\mathbb{R}$

$$C-D=t\cdot(A-B)\,.$$

In dat geval zijn ook de lijnstukken *AB* en *CD* evenwijdig.

De x-as en de y-as zijn de lijnen met vergelijking $y = 0$ resp. $x = 0$. We noemen deze lijnen de *coördinaatassen*. De x-as is de *horizontale* as en de y-as de *verticale* as. Horizontale lijnen zijn evenwijdig met de x-as. Verticale lijnen zijn evenwijdig met de y-as. Een lijn *l* met vergelijking $a_1x + a_2y = c$ is verticaal, als $a_2 = 0$. Is *l* niet verticaal, dan is $a_2 \neq 0$ en kunnen we de vergelijking in de vorm $y = px + q$ schrijven. We noemen dan het getal p de *richtingscoëfficiënt*, afgekort rc, van lijn *l*. Bij een verticale lijn stellen we de rc op ∞ ['oneindig'].

Toon aan:

1.3.6 Twee lijnen zijn evenwijdig precies dan, wanneer ze dezelfde richtingscoëfficiënt hebben.

Dat punten op een lijn liggen is een affiene eigenschap:

1.3.7 Een affiene transformatie F beeldt de lijn AB af op de lijn $A'B'$ met $A' = F(A)$ en $B' = F(B)$. Punt $X = A + t(B - A)$ wordt door F afgebeeld op $X' = A' + t(B' - A')$.

Bewijs. Stel $A \neq B$ en $F(X) = L(X) + R$ met $\det(L) \neq 0$. Dan $A' \neq B'$ en

$$F(X) = L(A + t(B - A)) + R = (L(A) + R) + t((L(B) + R) - (L(A) + R)) \text{ ofwel}$$

$$X' = A' + t(B' - A').$$

Toon aan:

1.3.8 Als F een transformatie van $\mathbb{R}^2$ is die lijnen op lijnen afbeeldt, dan beeldt F twee evenwijdige lijnen k en l af op twee evenwijdige lijnen k' en l'. Dit geldt i.h.b. wanneer F een affiene transformatie is.

Definitie. Figuren die elkaars beeld zijn onder de transformaties uit een transformatiegroep $\mathcal{G}$ noemen we $\mathcal{G}$*-equivalent*.

Bij een transformatiegroep $\mathcal{G}$ is het belangrijk om na te gaan welke specifieke eigenschappen behouden blijven onder de transformaties uit de groep. Heeft een bepaalde figuur deze eigenschappen, dan hebben ook alle $\mathcal{G}$-equivalente figuren deze eigenschappen.

Een affiene transformatie van $\mathbb{R}^2$ is volledig bepaald door drie punten *A*, *B* en *C*, die niet op een lijn liggen, en hun beeldpunten A', B' resp. C'. Drie punten die niet op één lijn liggen vormen de *hoekpunten* van een *driehoek*. De lijnen *AB*, *BC* en *AC* zijn de *zijden* van driehoek *ABC*. Soms moeten we de zijden van driehoek *ABC* ook opvatten als de *lijnstukken AB*, *BC* en *AC*. Dat staat er niet altijd expliciet bij en moet vaak blijken uit de context.

1.3.9 *Alle driehoeken in* $\mathbb{R}^2$ *zijn affien equivalent.* Er is precies één affiene transformatie F die de hoekpunten A, B en C van driehoek ABC in deze volgorde afbeeldt op de hoekpunten A', B' resp. C' van driehoek $A'B'C'$.

Bewijs. $G(X) = A + x_1(B - A) + x_2(C - A)$ is de affiene transformatie die O, E_1, E_2 in deze volgorde afbeeldt op A, B resp. C. Evenzo beeldt de affiene transformatie $H(X) = A' + x_1(B' - A') + x_2(C' - A')$ de punten O, E_1, E_2 in deze volgorde af op A', B', C'. De transformatie $F = H \circ G^{-1}$ heeft de genoemde eigenschappen.

Opgave. Toon aan dat

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

[Het rechterlid is een 3×3-determinant. Zie paragraaf 7.1.]

1.4. Verhoudingen van evenwijdige translaties en pijlen.

Definitie. Getallenparen (a,b) en (c,d), die niet gelijk zijn aan $(0,0)$, hebben *dezelfde verhouding*, wanneer er een getal $r \neq 0$ is zo dat $(c,d) = (r \cdot a, r \cdot b)$. We schrijven dan $a:b = c:d$.

Ga na dat $a:b = c:d \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$. Wanneer b en d beide $\neq 0$ zijn, dan

$$a:b = c:d \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Als bijv. $d = 0$ in $a:b = c:d$, dan $c \neq 0$ en $a:b = c:0 \Leftrightarrow a \neq 0$ en $b = 0$.

Als A en B twee verschillende punten zijn op lijn k, dan is $\varphi(t) = A + t(B - A)$ een parametervoorstelling, afgekort pv, van lijn AB. Bij iedere parameter t hoort precies één punt op de lijn en omgekeerd. Lijn k wordt daarmee een *getallenlijn*. Lijn k wordt door de keuze van de punten A en B, in deze volgorde, van een *richting* voorzien die wordt gegeven door de pijl $\overrightarrow{AB}$.

Definitie. Stel P, Q, R en S zijn punten op een lijn k zo dat $P \neq Q$ of $R \neq S$. De parameters van deze punten m.b.t. een bepaalde pv van lijn k duiden we aan met de corresponderende kleine letters p, q, r en s. Dan stellen we

$$\overrightarrow{PQ} : \overrightarrow{RS} = (q - p) : (s - r).$$

Als $R \neq S$, dan $r \neq s$ en kunnen we de verhouding $(q - p) : (s - r)$ ook opvatten als het getal $t = \dfrac{q - p}{s - r}$. In dat geval noteren we $\overrightarrow{PQ} : \overrightarrow{RS}$ ook als $\dfrac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{RS}}$

Opmerking. Het is duidelijk dat de waarde van $\overrightarrow{PQ} : \overrightarrow{RS}$ afhangt van de volgorde van de punten P, Q, R en S. Dat de waarde van $\overrightarrow{PQ} : \overrightarrow{RS}$ niet afhangt van de gekozen pv van lijn k volgt uit 1.3.2. Is x' de parameter van X bij een andere pv van k, dan zijn er volgens 1.3.2 getallen $a \neq 0$ en b zo dat $x' = ax + b$. Ga na dat dan

$$\frac{q' - p'}{s' - r'} = \frac{q - p}{s - r}.$$

Belangrijk is ook dat de waarde van $\overrightarrow{PQ} : \overrightarrow{RS}$ behouden blijft onder affiene transformaties van $\mathbb{R}^2$ [zie 1.4.5]. Het is duidelijk dat we het 'product' $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{RS}$ niet op dezelfde manier kunnen definiëren d.m.v. $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{RS} = (q - p) \cdot (s - r)$. De waarde van $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{RS}$ zou dan afhangen van de gekozen pv van lijn k en niet behouden blijven onder affiene transformaties. Bovendien zullen we $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{RS}$ in een heel andere betekenis gebruiken in paragraaf 1.6.

Toon aan:

1.4.1 Als P, Q, R en S punten zijn op een lijn k zo dat $R \neq S$, dan

$$\frac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{RS}} = \overrightarrow{PQ} : \overrightarrow{RS} = t \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = t \cdot \overrightarrow{RS} \Leftrightarrow Q - P = t(S - R)$$

Opmerking. In $\overrightarrow{PQ} = t \cdot \overrightarrow{RS}$ moeten we $\overrightarrow{PQ}$ en $\overrightarrow{RS}$ opvatten als translaties, want we hebben afgesproken dat $\overrightarrow{PQ} = t \cdot \overrightarrow{RS}$ bij pijlen alleen gedefinieerd is met $P = R$. Als $\overrightarrow{RS}$ een pijl is, dan levert het product $t \cdot \overrightarrow{RS}$ een pijl met beginpunt R op.

Afspraak. De notatie $\overrightarrow{PQ} : \overrightarrow{RS}$ gebruiken we alleen, als $P \neq Q$ of $R \neq S$.

Gebruik van de notatie $\frac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{RS}}$ impliceert dat $R \neq S$.

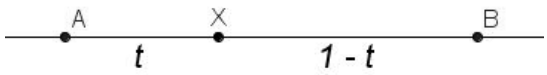
Uit 1.4.1 volgt:

1.4.2 Zijn $P \neq Q$ en $R \neq S$ punten op een lijn k en $\overrightarrow{PQ} : \overrightarrow{RS} = t$, dan zijn $\overrightarrow{PQ}$ en $\overrightarrow{RS}$ gelijkgericht als $t > 0$ en tegengesteld gericht, als $t < 0$.

Als $\overrightarrow{PQ} : \overrightarrow{RS} = t$, dan $\overrightarrow{PQ} : \overrightarrow{SR} = \overrightarrow{QP} : \overrightarrow{RS} = -t$ en $\overrightarrow{RS} : \overrightarrow{PQ} = 1/t$.

1.4.3 Als $X = A + t \cdot (B - A)$ een punt op lijn AB is, dan $\overrightarrow{AX} : \overrightarrow{AB} = t$ en $\overrightarrow{AX} : \overrightarrow{XB} = t : (1 - t)$. Als $X \neq B$, dan mogen we de verhouding $t : (1 - t)$ ook interpreteren als het getal $t / (1 - t)$.

Bewijs. $\overrightarrow{AX} : \overrightarrow{AB} = (t - 0) : (1 - 0) = t$ en $\overrightarrow{AX} : \overrightarrow{XB} = (t - 0) : (1 - t)$.



De formule uit stelling 1.4.1 is bruikbaar als *definitie* van de verhouding $\overrightarrow{PQ} : \overrightarrow{RS}$, als P, Q, R en S punten zijn zo dat de lijnen PQ en RS evenwijdig zijn.

Definitie. Als de lijnen PQ en RS evenwijdig zijn, dan

$$\overrightarrow{PQ} : \overrightarrow{RS} = t \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = t \cdot \overrightarrow{RS} \Leftrightarrow Q - P = t(S - R).$$

[Voor punten P, Q, R en S die op eenzelfde lijn liggen stemt deze nieuwe definitie van $PQ : RS = t$ overeen met de oorspronkelijke definitie.]

Toon aan:

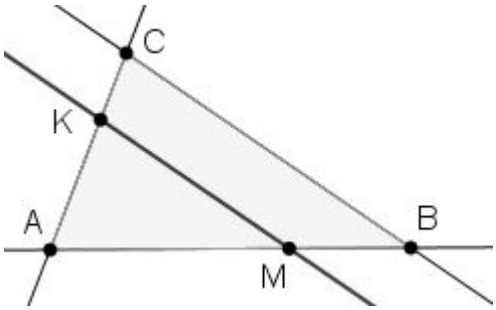
1.4.4 Als de lijnen PQ, RS en TU evenwijdig zijn, dan

$$\frac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{RS}} \cdot \frac{\overrightarrow{RS}}{\overrightarrow{TU}} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{TU}}.$$

Affiene transformaties beelden een lijn af op een lijn, een stel evenwijdige lijnen op een stel evenwijdige lijnen, een stel snijdende lijnen op een stel snijdende lijnen. Hierbij blijven verhoudingen op een lijn of op evenwijdige lijnen behouden.

1.4.5 Als de lijnen PQ en RS evenwijdig zijn, F is een affiene transformatie en P', Q', R', S' zijn de beelden van P, Q, R, S onder F, dan zijn de lijnen $P'Q'$ en $R'S'$ evenwijdig en $\overrightarrow{P'Q'} : \overrightarrow{R'S'} = \overrightarrow{PQ} : \overrightarrow{RS}$.

Bewijs. Stel dat aan de voorwaarden is voldaan. Volgens 1.3.8 geldt dan $P'Q' \parallel R'S'$. Toon aan dat $Q' - P' = t(S' - R') \Leftrightarrow Q - P = t(S - R)$.



1.4.6 Stel K en M zijn punten $\neq A$ op de zijden AC en AB van driehoek ABC zo dat $K = A + t(C - A)$ en $M = A + t(B - A)$, dan $K - M = t(C - B)$, dus $KM \parallel BC$ en

$$\overrightarrow{AK} : \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} : \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MK} : \overrightarrow{BC} = t\,.$$

Als $t < 0$, dan ligt punt A op lijn AB tussen de punten M en B en op lijn AC ligt A tussen C en K.

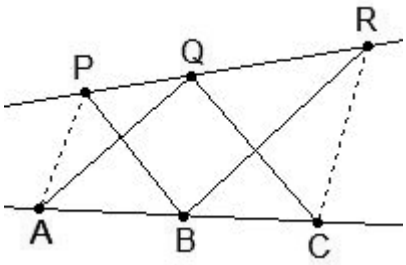
Omgekeerd geldt ook:

1.4.7 Als lijn l evenwijdig is met zijde BC van driehoek ABC en l snijdt zijde AC in punt $K = A + t(C - A)$, dan snijdt l zijde AB in punt $M = A + t(B - A)$.

Bewijs. Door K gaat maar één lijn evenwijdig met zijde BC en dat is de lijn KM uit stelling 1.4.6.

Ga na dat met de parametriseringen $X = A + t(C - A)$ en $X = A + t(B - A)$ van twee verschillende lijnen AC resp. AB alle verbindingslijnstukken KM, met K op AC en M op AB zo dat K en M dezelfde parameter $t \neq 0$ hebben, evenwijdig zijn. Hoort lijnstuk KM bij parameter t en lijnstuk $K'M'$ bij parameter t', dan

$$\overrightarrow{AK} : \overrightarrow{AK'} = \overrightarrow{AM} : \overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{MK} : \overrightarrow{M'K'} = t : t'\,.$$



1.4.8 *Pappus*. Stel de lijnen *k* en *l* snijden elkaar in punt *S*. De punten $P,Q,R \neq S$ liggen op *k* en de punten $A,B,C \neq S$ liggen op *l*. Dan:

$$PB \parallel QC, QA \parallel RB \Rightarrow PA \parallel RC .$$

Bewijs. Zie de figuur hierboven. Daarin $PB \parallel QC, QA \parallel RB$. Dus

$$\frac{\overrightarrow{SA}}{\overrightarrow{SB}} = \frac{\overrightarrow{SQ}}{\overrightarrow{SR}} \text{ en } \frac{\overrightarrow{SB}}{\overrightarrow{SC}} = \frac{\overrightarrow{SP}}{\overrightarrow{SQ}} .$$

Met 1.4.4 volgt hieruit $\frac{\overrightarrow{SA}}{\overrightarrow{SC}} = \frac{\overrightarrow{SP}}{\overrightarrow{SR}}$, dus $PA \parallel RC$ volgens 1.4.7.

Opgave. Toon aan dat 1.4.8 ook geldt met $k \parallel l$.

Definitie. Een affiene transformatie *F* van de vorm $F(X) = r \cdot X + P$ met $r \neq 0$ noemen we een *dilatatie*.

[Als $r = 1$, dan is *F* de translatie $\overrightarrow{OP}$.]

Toon aan:

1.4.9 Als *F* een dilatatie is en *k* een lijn, dan is de beeldlijn $F(k)$ evenwijdig met *k*.

1.4.10 Een dilatatie $F(X) = r \cdot X + P$ is een translatie of er is precies één punt *A* in $\mathbb{R}^2$ zo dat $F(A) = A$.

Bewijs. Als $r \neq 1$, dan $F(A) = r \cdot A + P = A \Leftrightarrow P = (1-r)A \Leftrightarrow A = \frac{1}{1-r} \cdot P$.

Als $F(A) = A$, dan noemen we *A* een *dekpunt* van *F*. Een translatie $\overrightarrow{OP}$ heeft geen dekpunten, als $P \neq O$. Bij de translatie $\overrightarrow{OO}$ is ieder punt van $\mathbb{R}^2$ dekpunt.

Definitie. Als *A* een dekpunt is van de dilatatie $F(X) = r \cdot X + P$, dan noemen we *F* een *vermenigvuldiging t.o.v. punt A met factor r*.

[Als $r = 1$ en $P = O$, dan $F(X) = X$ voor iedere $X \in \mathbb{R}^2$.]

1.4.11 Als A een dekpunt is van de dilatatie $F(X) = r \cdot X + P$, dan $P = (1-r)A$ en dus $X' = F(X) = r \cdot (X - A) + A$. X' ligt dan op lijn AX en $\overrightarrow{AX'} : \overrightarrow{AX} = r$.

Toon aan:

1.4.12 De dilataties vormen een transformatiegroep van $\mathbb{R}^2$. De translaties vormen hiervan een ondergroep. Ook de vermenigvuldigingen t.o.v. een punt A vormen een ondergroep van de dilataties.

1.4.13 Stel ABC is een driehoek met $K \neq A$ op zijde AC en $M \neq A$ op zijde AB zo dat $MK \parallel BC$. Dan is de affiene transformatie F die driehoek ABC afbeeldt op driehoek AMK een dilatatie met dekpunt A en factor r. Als $X' = F(X)$, dan ligt X' op lijn AX en $\overrightarrow{AX'} : \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AM} : \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AK} : \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MK} : \overrightarrow{BC}$.

Opgave. Een lineaire transformatie L die iedere lijn k afbeeldt op een lijn k' zo dat $k' \parallel k$ is een vermenigvuldiging t.o.v. O met een factor $r \neq 0$. De enige affiene transformaties van $\mathbb{R}^2$ die iedere lijn k afbeelden op een lijn k' die evenwijdig is met k zijn de dilataties van $\mathbb{R}^2$.

Opgave. Wanneer PQ en RS verschillende evenwijdige lijnen zijn en $\overrightarrow{PQ} : \overrightarrow{RS} = r$ met $r \neq 1$, dan hebben de lijnen PR en QS een snijpunt A en de lijnen PS en QR hebben een snijpunt B. Verder $\overrightarrow{AP} : \overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AQ} : \overrightarrow{AS} = r$ en $\overrightarrow{BP} : \overrightarrow{BS} = \overrightarrow{BQ} : \overrightarrow{BR} = -r$.

Toon aan:

1.4.14 Als ABC en $A'B'C'$ driehoeken zijn zo dat de corresponderende zijden evenwijdig zijn, dan is er een dilatatie die driehoek ABC afbeeldt op driehoek $A'B'C'$.

De volgende twee stellingen zijn speciale gevallen van een algemenere stelling, die we later zullen bewijzen. Zie 4.2.2.

Toon aan:

Desargues (a) Stel dat de driehoeken ABC en $A'B'C'$ geen gemeenschappelijke hoekpunten hebben. De verbindingslijnen AA', BB' en CC' zijn drie verschillende lijnen en gaan door één punt S of zijn evenwijdig. Dan $AB \parallel A'B',\ BC \parallel B'C' \Rightarrow AC \parallel A'C'$.

Toon aan:

Desargues (b) Stel dat de driehoeken ABC en $A'B'C'$ geen gemeenschappelijke hoekpunten hebben en AA', BB' en CC' zijn drie verschillende lijnen. Verder zijn de corresponderende zijden van beide driehoeken evenwijdig. Dan gaan de verbindingslijnen AA', BB' en CC' van de corresponderende hoekpunten door één punt S of ze zijn evenwijdig.

Bij een affiene transformatie van $\mathbb{R}^2$ gaan lijnen over in lijnen, waarbij verhoudingen op een lijn intact blijven. Omgekeerd geldt ook:

1.4.15 Iedere afbeelding F van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}^2$ waarbij lijnen overgaan in lijnen en waarbij verhoudingen op een lijn intact blijven, is een affiene transformatie van $\mathbb{R}^2$.

Bewijs. Stel dat F een afbeelding van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}^2$ is, waarbij lijnen overgaan in lijnen en waarbij verhoudingen op een lijn intact blijven. Dan $X \neq Y \Rightarrow F(X) \neq F(Y)$. Hieruit volgt dat $k \parallel l \Rightarrow F(k) \parallel F(l)$. Ga na dat twee snijdende lijnen k en l worden afgebeeld op twee snijdende lijnen $F(k)$ en $F(l)$, waarbij het snijpunt van k en l wordt afgebeeld op het snijpunt van $F(k)$ en $F(l)$. Stel dat $F(O) = A$. Dan heeft de afbeelding die gedefinieerd wordt door $G(X) = F(X) - A$ ook deze eigenschappen en $G(O) = O$. We gaan na dat G een lineaire transformatie van $\mathbb{R}^2$ is. Neem $P \neq O$ en $G(P) = P'$, dan wordt lijn OP door G op lijn OP' afgebeeld. Hierbij wordt punt $X = tP$ afgebeeld op punt $X' = tP'$, want $\overrightarrow{OP'} : \overrightarrow{OX'} = \overrightarrow{OP} : \overrightarrow{OX} = t$. Dus $G(tP) = tG(P)$. Neem nu $P, Q \neq O$ zo dat de lijnen OP en OQ niet samenvallen. . Dan is $OPRQ$ met $R = P + Q$ een parallellogram, waarin R het snijpunt is van lijn $k \parallel OQ$ door P en lijn $l \parallel OP$ door Q. Met $P' = G(P)$, $Q' = G(Q)$ en $R' = G(R)$ is ook $O'P'Q'R'$ een parallellogram en dus $R' = P' + Q'$ ofwel $G(P + Q) = G(P) + G(Q)$. Ga na dat dit ook geldt als de lijnen OP en OQ samenvallen of als $P = O$ of $Q = O$. Hiermee is aangetoond dat G een lineaire transformatie van $\mathbb{R}^2$ is. $F(X) = G(X) + A$ is dus een affiene transformatie van $\mathbb{R}^2$.

1.5 Bijzondere lijnen bij driehoeken.
De verbindingslijn en ook het verbindingslijnstuk van de middens van twee zijden van een driehoek heet een *middenparallel* van de driehoek.

Toon aan:

1.5.1 *Middenparallel*. Zijn K en L de middens van de zijden AC resp. BC van driehoek ABC, dan is middenparallel KL evenwijdig met zijde AB en $KL : AB = 1:2$.

[Idem voor de andere middenparallellen van driehoek ABC.]

Een *zwaartelijn* van een driehoek verbindt een hoekpunt met het midden van de overstaande zijde. Vaak wordt met zwaartelijn ook het lijnstuk bedoeld dat een hoekpunt met het midden van de overstaande zijde verbindt.

Zijn K, L en M de middens van de zijden AC, BC resp. AB van driehoek ABC, dan zijn de corresponderende zijden van de driehoeken KLM en ABC evenwijdig. Dus de verbindingslijnen van de corresponderende hoekpunten gaan door één punt Z [ze zijn niet evenwijdig]. Ga na dat $\overrightarrow{LZ} : \overrightarrow{ZA} = \overrightarrow{KZ} : \overrightarrow{ZB} = \overrightarrow{MZ} : \overrightarrow{ZC} = 1:2$. Dus

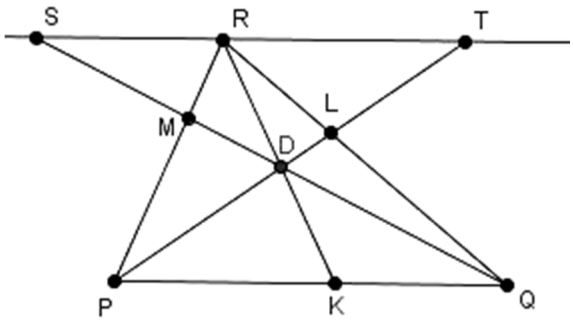
1.5.2 De zwaartelijnen van een driehoek gaan door één punt, het *zwaartepunt* van de driehoek, en delen elkaar in de verhouding $1:2$.

Toon aan dat $Z = \frac{1}{3}(A + B + C)$ het zwaartepunt van driehoek ABC is.

Een algemeen criterium om te bepalen of lijnen door de hoekpunten van een driehoek door één punt gaan wordt geleverd door de volgende stelling.

1.5.3 *De stelling van Ceva*. Stel K, L en M zijn drie punten op de zijden PQ, QR en RP van driehoek PQR die niet samenvallen met een hoekpunt van de driehoek. Dan zijn de lijnen PL, QM en RK evenwijdig of ze gaan door één punt precies dan, wanneer

$$\frac{\overrightarrow{PK}}{\overrightarrow{KQ}} \cdot \frac{\overrightarrow{QL}}{\overrightarrow{LR}} \cdot \frac{\overrightarrow{RM}}{\overrightarrow{MP}} = 1 .$$



Bewijs. Stel *K*, *L* en *M* voldoen aan de voorwaarden. Trek een lijn door *R* evenwijdig met *PQ*. We bekijken eerst het geval dat *PL*, *QM* en *RK* niet evenwijdig zijn. Neem aan dat *PL*, *QM* en *RK* door één punt *D* gaan. [Punt *D* hoeft niet binnen driehoek *ABC* te liggen.] Dan

$$\frac{\overrightarrow{PK}}{\overrightarrow{KQ}}=\frac{\overrightarrow{RT}}{\overrightarrow{SR}}\text{ , }\frac{\overrightarrow{QL}}{\overrightarrow{LR}}=\frac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{RT}}\text{ en }\frac{\overrightarrow{RM}}{\overrightarrow{MP}}=\frac{\overrightarrow{SR}}{\overrightarrow{PQ}}.$$

Met 1.4.4 geeft dit

$$\frac{\overrightarrow{PK}}{\overrightarrow{KQ}}\cdot\frac{\overrightarrow{QL}}{\overrightarrow{LR}}\cdot\frac{\overrightarrow{RM}}{\overrightarrow{MP}}=\frac{\overrightarrow{RT}}{\overrightarrow{SR}}\cdot\frac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{RT}}\cdot\frac{\overrightarrow{SR}}{\overrightarrow{PQ}}=1$$

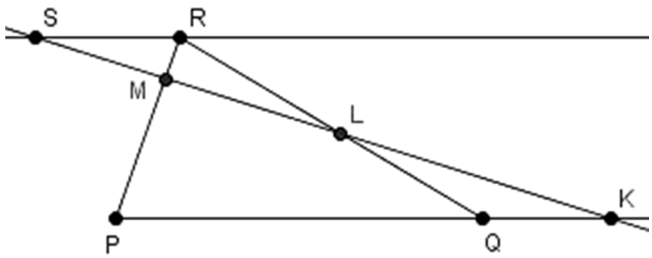
Ook het omgekeerde geldt dan. Neem *D* als het snijpunt van *PL* en *QM* . Stel het snijpunt van lijn *RD* met zijde *PQ* is punt *N*. Uit het voorgaande volgt dat

$\frac{\overrightarrow{PK}}{\overrightarrow{KQ}}\cdot\frac{\overrightarrow{QL}}{\overrightarrow{LR}}\cdot\frac{\overrightarrow{RN}}{\overrightarrow{NP}}=1$. Dus $\frac{\overrightarrow{RN}}{\overrightarrow{NP}}=\frac{\overrightarrow{RM}}{\overrightarrow{MP}}$. Dit betekent dat $N=M$.

Bekijk nu zelf nog het geval dat *PL*, *QM* en *RK* evenwijdig zijn.

Op soortgelijke wijze wordt bewezen:

1.5.4 *De stelling van Menelaus*. Stel *K, L* en *M* zijn drie punten op de zijden *PQ*, *QR* en *RP* van driehoek *PQR* die niet samenvallen met een hoekpunt van de driehoek. Dan liggen de punten *K, L* en *M* op één lijn precies dan, wanneer $\frac{\overrightarrow{PK}}{\overrightarrow{KQ}}\cdot\frac{\overrightarrow{QL}}{\overrightarrow{LR}}\cdot\frac{\overrightarrow{RM}}{\overrightarrow{MP}}=-1$.



Bewijs. Stel *K*, *L* en *M* voldoen aan de voorwaarden. Neem eerst aan dat *K*, *L* en *M* op één lijn liggen. Deze lijn snijdt de lijn door *R* die evenwijdig is met zijde *PQ* in punt *S*.

Dan

$$\frac{\overrightarrow{QL}}{\overrightarrow{LR}}=\frac{\overrightarrow{KQ}}{\overrightarrow{RS}}\text{ en }\frac{\overrightarrow{RM}}{\overrightarrow{MP}}=\frac{\overrightarrow{RS}}{\overrightarrow{KP}}.$$

Met 1.4.4 krijgen we

$$\frac{\overrightarrow{PK}}{\overrightarrow{KQ}} \cdot \frac{\overrightarrow{QL}}{\overrightarrow{LR}} \cdot \frac{\overrightarrow{RM}}{\overrightarrow{MP}} = \frac{\overrightarrow{PK}}{\overrightarrow{KQ}} \cdot \frac{\overrightarrow{KQ}}{\overrightarrow{RS}} \cdot \frac{\overrightarrow{RS}}{\overrightarrow{KP}} = -1 .$$

Wat betreft het omgekeerde: neem aan dat

$$\frac{\overrightarrow{PK}}{\overrightarrow{KQ}} \cdot \frac{\overrightarrow{QL}}{\overrightarrow{LR}} \cdot \frac{\overrightarrow{RM}}{\overrightarrow{MP}} = -1 ,$$

maar dat lijn *KL* zijde *PR* snijdt in punt *N*. Dan volgt met het voorgaande dat

$$\frac{\overrightarrow{PK}}{\overrightarrow{KQ}} \cdot \frac{\overrightarrow{QL}}{\overrightarrow{LR}} \cdot \frac{\overrightarrow{RN}}{\overrightarrow{NP}} = -1$$

en dus

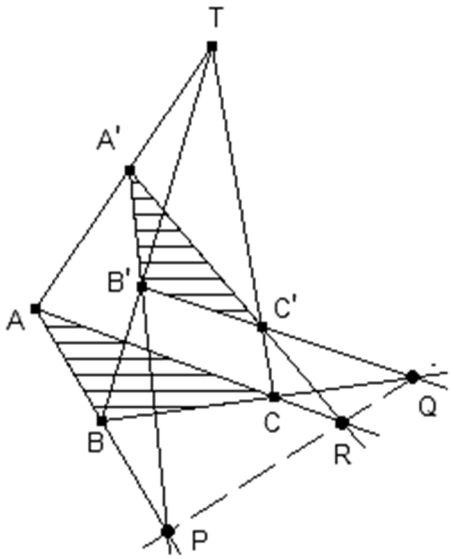
$\frac{\overrightarrow{RN}}{\overrightarrow{NP}} = \frac{\overrightarrow{RM}}{\overrightarrow{MP}}$. Dat betekent dat $M = N$.

Opmerking. Als *X* een punt op lijn *AB* is, dan noteren sommige auteurs de verhouding $\overrightarrow{AX} : \overrightarrow{XB}$ als (ABX). Weer anderen schrijven dit als (AXB).

Nog een versie van de stelling van Desargues.

Desargues (c) Wanneer de driehoeken ABC en $A'B'C'$ zodanig liggen dat de verbindingslijnen AA', BB' en CC' van corresponderende hoekpunten door één punt *T* gaan en de corresponderende zijden van de driehoeken snijden elkaar in *P*, *Q* en *R*, dan liggen *P*, *Q* en *R* op één lijn.

Opmerking. Dat dit inderdaad klopt 'zien we direct' door de volgende figuur ruimtelijk te interpreteren. *T ABC* is dan een piramide die gesneden wordt door vlak $A'B'C'$. De punten *P*, *Q* en *R* liggen dan op de snijlijn van vlak $A'B'C'$ met het grondvlak *ABC*.



Bewijs. Voor een bewijs dat zich volledig in het platte vlak afspeelt, beschouwen we eerst driehoek *TAB* met de lijn door A', B' en P. Dat geeft

$$\frac{\overrightarrow{TA'}}{\overrightarrow{A'A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{B'T}} = -1 .$$

Evenzo geeft driehoek *TBC* met de lijn door B', C' en Q:

$$\frac{\overrightarrow{TB'}}{\overrightarrow{B'B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{C'T}} = -1 .$$

Tenslotte geeft driehoek *TCA* met de lijn door A', C' en R

$$\frac{\overrightarrow{TC'}}{\overrightarrow{C'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{A'T}} = -1 .$$

Vermenigvuldigen van de overeenkomstige leden van deze vergelijkingen levert dan

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}} = -1 .$$

Volgens 1.5.4 liggen *P*, *Q* en *R* dus op één lijn.

2 Gelijkvormigheid en congruentie

2.1 Inwendig product.

Voor het standaard inwendig product of kortweg *inproduct* zullen we de notatie $X \cdot Y$ gebruiken. In de Engelstalige literatuur spreekt men van *'dot product'*. De 'punt' gebruiken we ook als teken voor het product van getallen en soms ook in $t \cdot X$. Met een beetje opletten levert dat geen verwarring op. Een andere veelgebruikte notatie voor het inproduct is $\langle X, Y \rangle$.

Definitie. $X \cdot Y = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$.

Merk op dat $X \cdot Y$ een getal is en niet een punt.

Opgave. Ga na dat $(X + Y) \cdot Z = X \cdot Z + Y \cdot Z$, $(tX) \cdot Y = t(X \cdot Y)$ [dus haakjes zijn hier overbodig]. I.h.b. $O \cdot X = 0$. Als $X \neq O$, dan $X \cdot X > 0$. Verder $X \cdot Y = Y \cdot X$.

We breiden de definitie van het inproduct uit tot het inproduct van translaties en pijlen:

Definitie. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (B - A) \cdot (D - C)$.

Met behulp van het inproduct wordt gedefinieerd wanneer twee lijnen loodrecht op elkaar staan.

Definitie. Loodrecht. De lijnen *AB* en *CD* staan loodrecht op elkaar, notatie $AB \perp CD$, precies dan, wanneer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$. $AB \perp CD$ geldt ook als $A = B$ of $C = D$.
Lijnstukken *AB* en *CD* staan loodrecht op elkaar, als de lijnen *AB* en *CD* loodrecht op elkaar staan. $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow AB \perp CD$.

Opmerking. $A \cdot B = 0$ kunnen we ook schrijven als $(A - O) \cdot (B - O) = 0$, dus $A \cdot B = 0$ betekent dus dat de lijnen *OA* en *OB* loodrecht op elkaar staan. $A \cdot B = 0$ geldt ook als $A = O$ of $B = O$.

Toon aan:

2.1.1 Voor lijnen *k*, *l* en *m* geldt:

(i) Wanneer *k* en *l* evenwijdig zijn, dan $k \perp m \Leftrightarrow l \perp m$.

(ii) Wanneer $k \perp m$, $l \perp m$, dan zijn *k* en *l* evenwijdig.

De vergelijking $p_1 x_1 + p_2 x_2 = 0$ kunnen we met behulp van het inproduct ook schrijven als $P \cdot X = 0$. De lijn met deze vergelijking bestaat uit de punten X zo dat OX loodrecht staat op de lijn *OP*. M.a.w. de lijn $p_1 x_1 + p_2 x_2 = 0$ is de lijn door O , die loodrecht staat op de lijn *OP*. Is *A* een punt op lijn $p_1 x_1 + p_2 x_2 = c$, dan $P \cdot A = c$ en dus $P \cdot (X - A) = 0$. Dat betekent dat lijn $P \cdot (X - A) = 0$ de lijn door punt *A* is die loodrecht staat op de lijn *OP*.

Alle lijnen die loodrecht staan op lijn *OP* zijn evenwijdig volgens 2.1.1 (ii). Dus

2.1.2 Alle lijnen $P \cdot X = c$ zijn evenwijdig en staan loodrecht op de lijn *OP*.

[Volgens afspraak is $P \neq O$.]

Definitie. De lijn door *O* die loodrecht staat op lijn *k* noemen we de *normaal* van lijn *k*. De lijn door *O* die evenwijdig is met *k* wordt de *richtingslijn* van lijn *k* genoemd. Een pijl ligt op een lijn, wanneer zijn beginpunt en zijn eindpunt op de lijn liggen. Dit geldt i.h.b. voor een vector. De lijn heet dan de *drager* van de pijl of vector. Een vector $\overrightarrow{OP}$ op de normaal van lijn *k* heet een *normaalvector* van *k*. Een vector $\overrightarrow{OQ}$ op de richtingslijn van *k* heet een *richtingsvector* van *k*.

Voorbeeld. Lijn *OP* is de normaal van de lijn met vergelijking $P \cdot X = c$ en $P \cdot X = 0$ is de vergelijking van de richtingslijn.

Voorbeeld. Lijn *AB* heeft $\overrightarrow{OQ}$ met $Q = B - A$ als richtingsvector. Als $P \cdot Q = 0$, dan is $\overrightarrow{OP}$ een normaalvector van lijn *AB* en $P \cdot X = c$ met $c = P \cdot A = P \cdot B$ is een vergelijking van lijn *AB*.

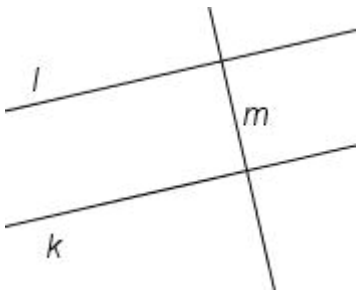
Opmerking. Een vector die zijn eindpunt op een lijn *k* heeft wordt een *steunvector* van *k* genoemd. Zo is iedere vector $\overrightarrow{OX}$ met $X = A + t(B - A)$ een steunvector van lijn *AB*. De notatie $\underline{x} = \underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a})$ geeft een *vectorvoorstelling* van deze lijn.

Toon aan:

2.1.3 Twee lijnen met vergelijking $P \cdot X = c$ resp. $Q \cdot X = d$ zijn evenwijdig precies dan, wanneer $\det(P, Q) = 0$. Ze hebben dan dezelfde richtingslijn en ook dezelfde normaal.

2.1.4 Is k een lijn en *P* een punt, dan gaat door *P* precies één lijn *l* die loodrecht op *k* staat en ook één lijn *m* die evenwijdig is met lijn *k* .

2.1.5 Twee lijnen met vergelijking $P \cdot X = c$ resp. $Q \cdot X = d$ staan loodrecht op elkaar precies dan, wanneer $P \cdot Q = 0$.



2.1.6 Twee niet verticale lijnen staan loodrecht op elkaar precies dan, wanneer het product van hun richtingscoëfficiënten gelijk aan -1 is. Een verticale lijn staat loodrecht op iedere horizontale lijn.

Lengten en afstanden. Schrijven we $A \cdot A$ korter als A^2, dan stelt $A^2 = a_1^2 + a_2^2$ het kwadraat van lengte van lijnstuk *OA* voor. Algemener vatten we

$$(A-B)^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2$$

op als het kwadraat van de lengte van lijnstuk *AB*. De lengte van lijnstuk *AB* noteren we als $|A-B|$.

Definitie. $|A-B| = \sqrt{(A-B)^2}$ en $|A| = |A-O| = \sqrt{A^2}$.

Met deze notatie geldt $(A-B)^2 = |A-B|^2$ en $A^2 = |A|^2$.

NB $\sqrt{(A-B)^2} = |A-B|$ en niet $\sqrt{(A-B)^2} = A-B$! Het laatste is onzin.

De lengte van lijnstuk *AB* wordt ook als $|AB|$ geschreven, dus $|AB| = |A-B|$.

Als $A \neq B$, dan $|A-B| > 0$. Ga na dat

$$|B-A| = |A-B| ,$$

$$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2A \cdot B + B^2 ,$$

$$(A+B)^2 = (A-B)^2 \Leftrightarrow A \cdot B = 0 \Leftrightarrow OA \perp OB .$$

$|AB|$ kunnen we ook zien als de *afstand* van *A* tot *B*.

Opmerking. Bij getallen *a* en *b* geldt $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$. Maar bij het inproduct $A \cdot B$ in $\mathbb{R}^2$ is i.h.a. $(A \cdot B)^2 \neq A^2 \cdot B^2$. Wel geldt

2.1.7 *Ongelijkheid van Cauchy-Schwarz.*

$$(A \cdot B)^2 \leq A^2 \cdot B^2 \text{ of gelijkwaardig } |A \cdot B| \leq |A| \cdot |B|$$

[*NB* $A \cdot B$ is een getal en $|A \cdot B|$ is de absolute waarde van dit getal.]

Bewijs. Werk $(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$ uit en breng alles naar rechts.

Dat laat zien dat $(A \cdot B)^2 \leq A^2 \cdot B^2 \Leftrightarrow 0 \leq (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$. Hieruit blijkt verder dat

$(A \cdot B)^2 = A^2 \cdot B^2 \Leftrightarrow \det(A, B) = 0$.

Gevolg:

2.1.8 *Driehoeksongelijkheid.* $|A \pm B| \le |A| + |B|$.

Meetkundige betekenis: Als *O*, *A* en *B* niet op één lijn liggen, dan is *OAB* een driehoek en $|A|, |B|$ en $|A - B|$ zijn de lengten van de zijden van de driehoek.

Bewijs. $(A+B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2 \le A^2 + 2|A \cdot B| + B^2$. Uit 2.1.7 volgt dan $(A+B)^2 \le A^2 + 2|A| \cdot |B| + B^2 = (|A| + |B|)^2$. Dit is gelijkwaardig met $|A+B| \le |A| + |B|$. Vervangen we *B* door $-B$, dan krijgen we $|A - B| \le |A| + |B|$.

Toon aan dat $|AC| \le |AB| + |BC|$. In welk geldt $|AC| = |AB| + |BC|$?

Definitie. We stellen $|\overrightarrow{AB}| = |AB|$.

2.1.9 $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$.

[$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$, maar bijv. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -\left(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}\right)$.]

Bewijs. $|AB|^2 = (A-B)^2 = \big((A-C) - (B-C)\big)^2$

$= (A-C)^2 - 2(A-C) \cdot (B-C) + (B-C)^2$

$= |AC|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Opmerking. Als *ABC* een driehoek is, dan is 2.1.9 in feite de *cosinusregel* [zie 3.1.7].

Definitie. Een *n-hoek* $A_1A_2 \cdots A_n$ $(n \ge 3)$ is een geordend n-tal verschillende punten $A_1, A_2, ..., A_n$. Deze punten heten de *hoekpunten* van de *n*-hoek. Voor $k = 1, ..., n-1$ noemen we A_k en A_{k+1} *opeenvolgende hoekpunten*. Ook A_n en A_1 noemen we opeenvolgende hoekpunten. We eisen dat geen drie opeenvolgende hoekpunten op één lijn liggen. Het verbindingslijnstuk van twee opeenvolgende hoekpunten is een *zijde* van de n-hoek. De zijden A_kA_{k+1} en $A_{k+1}A_{k+2}$ zijn *opeenvolgende zijden*. Op zijde $A_{n-1}A_n$ volgt zijde A_nA_1. Soms wordt een zijde ook wel opgevat als een lijn, wat de bedoeling is moet blijken uit de context. De lijnen of lijnstukken die twee niet opeenvolgende punten van de *n*-hoek verbinden zijn de *diagonalen* van de *n*-hoek. Vatten we de zijden van een *n*-hoek op als lijnstukken, dan zeggen we dat *n*-hoek *zichzelf doorsnijdt*, wanneer een tweetal niet opeenvolgende zijden een gemeenschappelijk punt heeft. Bij twee *n*-hoeken $A_1A_2 \cdots A_n$ en $B_1B_2 \cdots B_n$ noemen we A_k en B_k *corresponderende hoekpunten* en A_kA_{k+1} en B_kB_{k+1} *corresponderende zijden*. Met zijde A_nA_1 correspondeert zijde B_nB_1.

In het volgende hebben we meestal te maken met driehoeken en vierhoeken. Bij een driehoek en een vierhoek liggen geen drie hoekpunten op een lijn. Een vierhoek kan zichzelf doorsnijden. Twee zijden van een vierhoek *ABCD* die geen hoekpunt gemeen hebben, vormen een paar *overstaande zijden* van de vierhoek. De zijden *AB* en *CD* zijn overstaande zijden van vierhoek *ABCD*. Hetzelfde geldt voor de zijden *BC* en *AD*. De punten *A* en *C* vormen een paar *overstaande hoekpunten*. Hetzelfde geldt voor de hoekpunten *B* en *D*.

Wanneer we zeggen dat een transformatie *F* van $\mathbb{R}^2$ driehoek *ABC* afbeeldt op driehoek $A'B'C'$, dan bedoelen we dat *F* elk hoekpunt van driehoek *ABC* afbeeldt op het corresponderende hoekpunt van driehoek $A'B'C'$. De transformatie *F* die *ABC* afbeeldt op $A'B'C'$ is een andere transformatie dan de transformatie *G* die *ABC* afbeeldt op $B'C'A'$. Idem voor vierhoeken en algemener n-hoeken.

Definitie. Een *parallellogram ABCD* is een vierhoek, waarvan elk paar overstaande zijden een paar evenwijdige lijnen (of lijnstukken) is. Dit parallellogram is een *rechthoek*, wanneer een elk paar opeenvolgende zijden loodrecht op elkaar staat. Een *ruit* is een parallellogram, waarvan de diagonalen loodrecht op elkaar staan. Een *vierkant* is een rechthoek, waarvan de diagonalen loodrecht op elkaar staan.

Eerder zagen we dat vierhoek *ABCD* een parallellogram is precies dan, wanneer $A + C = B + D$. De diagonalen van een parallellogram delen elkaar middendoor. De overstaande zijden van een parallellogram zijn evenwijdig en even lang. Een parallellogram doorsnijdt zichzelf niet. Vierhoek *ABCD* is een parallellogram precies dan, wanneer $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Opgave. Toon aan dat de zijden van een ruit (dus ook van een vierkant) even lang zijn. Een ruit waarvan de diagonalen even lang zijn is een vierkant.

Afspraak. Om geen uitzonderingen te hoeven maken kan het soms handig zijn om *ABCD*, met vier verschillende punten *A, B, C, D* die op één lijn liggen, een *ontaarde vierhoek* te noemen. Als we het echter over een vierhoek zonder meer hebben, dan is altijd stilzwijgend een niet-ontaarde vierhoek bedoeld, die zichzelf niet doorsnijdt. Als dat niet het geval is, dan zeggen we dat er expliciet bij.

2.1.10 Alle parallellogrammen zijn affien-equivalent.

Bewijs. Stel *ABCD* en $A'B'C'D'$ zijn parallellogrammen. Dan is er precies één affiene afbeelding *F* die afbeeldt op driehoek $A'B'C'$. Ga na dat dan $F(D) = D'$.

Loodrechte stand is geen affiene eigenschap, loodrechte stand van lijnen blijft i.h.a. niet behouden onder een affiene transformatie. Wel blijft loodrechte stand behouden onder translatie.

Toon aan:

2.1.11 Loodrechte stand blijft behouden onder translaties. Onder een translatie gaan twee lijnen *k* en *l* zo dat $k \perp l$ over in twee lijnen k' en l' zo dat $k' \perp l'$.

Om te bepalen welke affiene transformaties nog meer de loodrechte stand behouden is het dus voldoende om de lineaire transformaties $L(X) = x_1P + x_2Q$ te bekijken. Hierin zijn *P* en *Q* de beelden van E_1 en E_2. Er geldt $OE_1 \perp OE_2$. Dus als *L* de loodrecht stand behoudt, dan ook $OP \perp OQ$ ofwel $P \cdot Q = 0$. Ook de lijnen *OA* en *OB* met $A(1,1)$ en $B(1,-1)$ staan loodrecht op elkaar, dus moet gelden $L(A) \cdot L(B) = 0$ ofwel

$$(P+Q) \cdot (P-Q) = P^2 - Q^2 = 0.$$

Dus $P^2 = Q^2$ ofwel $|P| = |Q|$. Opdat *L* de loodrechte stand intact laat, is noodzakelijk dat $P \cdot Q = 0$ en $|P| = |Q|$. We gaan na dat dit ook voldoende is. Stel $C \cdot D = 0$, $P \cdot Q = 0$ en $|P| = |Q|$. Toon aan dat dan $L(C) \cdot L(D) = 0$. Hieruit volgt dat onder *L* twee lijnen *k* en *l*, met normalen *OC* en *OD* die loodrecht op elkaar staan, overgaan in twee lijnen k' en l', met normalen $OL(C)$ en $OL(D)$ die ook weer loodrecht op elkaar staan.

Samen met 2.1.11 geeft dit:

2.1.12 Onder een affiene transformatie $F(X) = x_1P + x_2Q + R$ gaat ieder lijnenpaar *k* en *l* zo dat $k \perp l$ over in een lijnenpaar k' en l' zo dat $k' \perp l'$ precies dan, wanneer $P \cdot Q = 0$ en $|P| = |Q|$.

Ga na dat $P \cdot Q = 0$ en $|P| = |Q|$ betekent dat $Q = (-p_2, p_1)$ of $Q = (p_2, -p_1)$. De matrix van het lineaire deel $L(X) = x_1P + x_2Q$ van *F* is dan

$$\begin{bmatrix} p_1 & -p_2 \\ p_2 & p_1 \end{bmatrix} \text{ resp. } \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & -p_1 \end{bmatrix}$$

met determinant $\det(L) = p_1^2 + p_1^2 = |P|^2$ resp. $\det(L) = -(p_1^2 + p_1^2) = -|P|^2$.

Definitie. Een affiene transformatie $F(X) = x_1P + x_2Q + R$ waarin $P \cdot Q = 0$ en $|P| = |Q|$ noemen we een gelijkvormigheidstransformatie of kortweg een *gelijkvormigheid*. Als $|P| = |Q| = 1$ dan noemen we *F* een congruentietransformatie of kortweg een *congruentie*. Figuren die elkaars beeld zijn onder een gelijkvormigheid noemen we *gelijkvormig*. Figuren die elkaars beeld zijn onder een congruentie noemen we *congruent*.

Voorbeeld. Iedere dilatatie is een gelijkvormigheid.

2.1.13 Onder een gelijkvormigheid $F(X) = L(X) + R = x_1P + x_2Q + R$ worden alle lengten van lijnstukken met eenzelfde factor $r = |P|$ vermenigvuldigd. Als $r = 1$, dan is F een congruentie.

[Het omgekeerde van deze stelling geldt ook. Zie 2.4.11.]

Bewijs. Lijnstuk AB wordt door F afgebeeld op lijnstuk $A'B'$. Dan

$|A'B'|^2 = (A' - B')^2 = ((L(A) + R) - (L(B) + R))^2 = (L(A) - L(B))^2$

$= (L(A - B))^2 = ((a_1 - b_1)P + (a_2 - b_2)Q)^2 = (a_1 - b_1)^2 \cdot P^2 + (a_2 - b_2)^2 \cdot Q^2$

$= |AB|^2 \cdot |P|^2$. Dus $|A'B'| = |P| \cdot |AB|$.

2.2 Driehoeken en loodlijnen.

In driehoek *ABC* is zijde *AB* de *overstaande* zijde van hoekpunt *C*, *BC* is de overstaande zijde van hoekpunt *A* en *AC* is de overstaande zijde van hoekpunt *B*.

Volgens 1.3.3 ligt punt *C* op lijn *AB*, als $\det(B-A,\, C-A)=0$. Ga na dat

$$\det(B-A,\, C-A)=\det(A,B)+\det(B,C)+\det(C,A).$$

Dus meer symmetrisch kunnen we zeggen dat drie verschillende punten *A*, *B* en *C* op een lijn liggen precies dan, wanneer

$$\det(A,B)+\det(B,C)+\det(C,A)=0.$$

Een *rechthoekige driehoek* is een driehoek waarvan twee zijden loodrecht op elkaar staan.

Uit 2.1.9 volgt

2.2.1 $AC \perp BC \;\Leftrightarrow\; |AC|^2+|BC|^2=|AB|^2$.
Als *ABC* een driehoek is, dan komt dit neer op de *stelling van Pythagoras* en zijn omgekeerde.

2.2.2 Als *P* een punt op lijn *AB* is, dan $PX \perp AB$ precies dan, wanneer

$$|AX|^2-|BX|^2=|AP|^2-|BP|^2.$$

Bewijs. Stel dat punt *P* op lijn *AB* ligt. Dan $PX \perp AB$ precies dan, wanneer $PX \perp AX$ en $PX \perp BX$ [*P* mag samenvallen met *A* of *B*.]. Volgens 2.2.1 betekent dit dat

$$|PX|^2+|AX|^2=|AP|^2 \text{ en } |PX|^2+|BX|^2=|BP|^2.$$

Ga na dat dit gelijkwaardig is met

$$|AX|^2-|BX|^2=|AP|^2-|BP|^2.$$

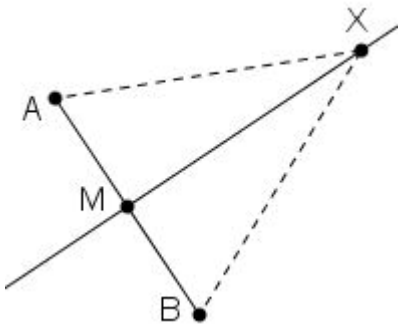
Opgave. Als $A \neq B$ en $c \in \mathbb{R}$, dan vormen de punten *X* zo dat $|AX|^2-|BX|^2=c$ een lijn *k* die loodrecht op lijn *AB* staat. [Aanwijzing: Schrijf $|AX|^2-|BX|^2=c$ in de vorm $px+qy=r$.] Er is dus precies één punt *P* op lijn *AB* zo dat voor ieder punt *X* op lijn *k* geldt

$$|AX|^2-|BX|^2=|AP|^2-|BP|^2=c.$$

Uit 2.2.2 vinden we een vorm van de stelling van Pythagoras voor driehoek *ABX* als speciaal geval terug [neem $P=B$]. Ook de volgende stelling is een speciaal geval van 2.2.2 [neem voor *P* het midden van lijnstuk *AB*.]

De *middelloodlijn* van lijnstuk *AB* is de lijn die gaat door het midden *M* van lijnstuk *AB* en die loodrecht op lijn *AB* staat. Punt *X* ligt op deze middelloodlijn precies dan, wanneer $XM \perp AB$ ofwel $(A-B)\cdot(X-M)=0$.

2.2.3 *X* is een punt op de middelloodlijn van lijnstuk *AB* precies dan, wanneer de lijnstukken *AX* en *BX* even lang zijn, ofwel $|AX| = |BX|$.



2.2.4 Lijnen *p*, *q* en *r* , die de zijden *AB*, *BC* en *CA* van driehoek *ABC* loodrecht snijden in de punten *P*, *Q* resp. *R* gaan door één punt precies dan, wanneer

$$(*)\quad |AP|^2 - |BP|^2 + |BQ|^2 - |CQ|^2 + |CR|^2 - |AR|^2 = 0 .$$

Bewijs. Stel dat de lijnen *p*, *q* en *r* de zijden *AB*, *BC* en *CA* van driehoek *ABC* loodrecht snijden in de punten *P*, *Q* resp. *R*. (a) Stel *p*, *q* en *r* gaan door *S*. Dan volgt uit 2.2.2 dat $|AS|^2 - |BS|^2 = |AP|^2 - |BP|^2$, $|BS|^2 - |CS|^2 = |BQ|^2 - |CQ|^2$ en ook $|CS|^2 - |AS|^2 = |CR|^2 - |AR|^2$. Optellen van de linkerleden geeft 0. Dus ook de som van de rechterleden is gelijk aan 0. (b) Wat betreft het omgekeerde: stel dat (*) geldt en *S* is het snijpunt van de lijnen *p* en *q*. Dan $|AS|^2 - |BS|^2 = |AP|^2 - |BP|^2$ en ook $|BS|^2 - |CS|^2 = |BQ|^2 - |CQ|^2$. Optellen geeft

$$|AS|^2 - |CS|^2 = |AP|^2 - |BP|^2 + |BQ|^2 - |CQ|^2 .$$

Met (*) krijgen we dan $|AS|^2 - |CS|^2 = |AR|^2 - |CR|^2$. Dat betekent volgens 2.2.2 dat *S* ook op loodlijn *r* ligt.

Gevolg:

2.2.5 De middelloodlijnen van de zijden van een driehoek gaan door één punt.

Een *hoogtelijn* van een driehoek is een lijn die door een hoekpunt van de driehoek gaat en loodrecht staat op de overstaande zijde. Soms wordt ook het verbindingslijnstuk bedoeld van een hoekpunt met het snijpunt van de loodlijn met de overstaande zijde. Dit snijpunt heet het *voetpunt* van de hoogtelijn.

2.2.6 De hoogtelijnen van een driehoek gaan door één punt, het *hoogtepunt* van de driehoek.

Bewijs. *CP*, *AQ* en *BR* zijn de hoogtelijnen van driehoek *ABC* met *P*, *Q*, *R* als voetpunten. Dan $|AC|^2 - |BC|^2 = |AP|^2 - |BP|^2$, $|AB|^2 - |AC|^2 = |BQ|^2 - |CQ|^2$ en $|BC|^2 - |AB|^2 = |CR|^2 - |AR|^2$. Optellen geeft (*) uit 2.2.4.

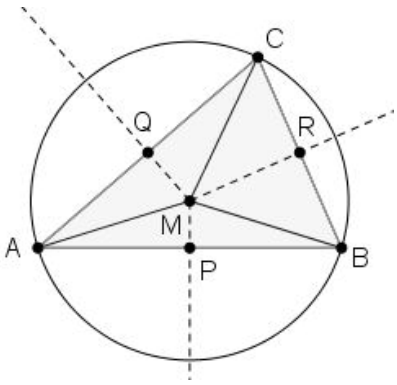
Opgave. Nog een ander bewijs van 2.2.6. Trek door elk hoekpunt van driehoek *ABC* een lijn evenwijdig met de overstaande zijde. De getrokken lijnen zijn de zijden van een driehoek *KLM* zo dat $KL \parallel AB$, $LM \parallel BC$ en $MK \parallel AC$. Ga na dat dan de middelloodlijnen van driehoek *KLM* de hoogtelijnen van driehoek *ABC* zijn. Dus deze gaan door één punt.

Definitie. Een *cirkel* met *middelpunt M* en *straal* $r > 0$ bestaat uit de punten *X* zo dat $|XM| = r$. De punten *X* zo dat $|XM| < r$ liggen *binnen* de cirkel, de punten *X* zo dat $|XM| > r$ liggen *buiten* de cirkel. Een lijn door het middelpunt van een cirkel heet een *middellijn* van de cirkel.

Een lijn door een punt *P* binnen een cirkel snijdt de cirkel in twee verschillende punten. Ligt punt *A* op de cirkel $|XM| = r$, dan heeft de lijn door *A* die loodrecht staat op de middellijn door *A* precies één punt met de cirkel gemeen. Deze lijn heet de *raaklijn* in *A* aan de cirkel. *A* is het *raakpunt* van deze raaklijn. De vergelijking van deze raaklijn is $(A - M) \cdot (X - A) = 0$. Toon aan dat voor een punt $X \neq A$ op deze raaklijn geldt dat $|XM| > |AM|$, m.a.w. zo'n punt ligt buiten de cirkel.

2.2.7 Door de hoekpunten van een driehoek gaat precies één cirkel, de *omgeschreven cirkel* van de driehoek. Het middelpunt van de omgeschreven cirkel is het snijpunt van de middelloodlijnen van de zijden van de driehoek.

Bewijs. Stel dat *M* het snijpunt is van de middelloodlijnen van de zijden van driehoek *ABC*. Dan volgt uit 2.2.3 dat $|MA| = |MB| = |MC| = r$. De cirkel met middelpunt *M* en straal *r* gaat door de hoekpunten *A*, *B* en *C*.



2.2.8 *Stelling van Thales en zijn omgekeerde.* Is *ABC* een driehoek, dan is het midden *M* van zijde *AB* het middelpunt van de omgeschreven cirkel van driehoek *ABC* precies dan, wanneer $AC \perp BC$.

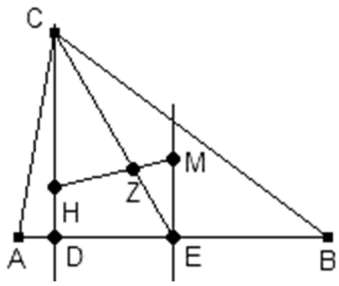
Bewijs. Stel *ABC* is een driehoek en $M = \frac{1}{2}(A+B)$. *M* is het middelpunt van de omgeschreven cirkel van driehoek *ABC* precies dan, wanneer $(M-C)^2 = (M-A)^2$. Dit is gelijkwaardig met $(A+B-2C)^2 = (B-A)^2$ ofwel

$$((A-C)+(B-C))^2 = ((A-C)-(B-C))^2$$

Ga na dat dit laatste op zijn beurt gelijkwaardig is met $(A-C)\cdot(B-C) = 0$ ofwel $AC \perp BC$.

2.2.9 *Lijn van Euler*. Het zwaartepunt *Z*, het hoogtepunt *H* en het middelpunt *M* van de omgeschreven cirkel van een driehoek liggen op één lijn, de *lijn van Euler* van deze driehoek. Er geldt $\overrightarrow{HZ} : \overrightarrow{ZM} = 2:1$.

Bewijs. In de figuur hiernaast is *ME* de middelloodlijn van zijde *AB*. *M* is het middelpunt van de omgeschreven cirkel en *Z* is het zwaartepunt van driehoek *ABC*, dus $\overrightarrow{CZ} : \overrightarrow{ZE} = 2:1$. *H* is het punt op lijn *MZ* zo dat $\overrightarrow{HZ} : \overrightarrow{ZM} = 2:1$. Dan zijn *CH* en *ME* evenwijdig en staan dus beide loodrecht op *AB*. *CH* is dus de hoogtelijn uit *C*. Op dezelfde manier tonen we aan dat *AH* en *BH* de hoogtelijnen uit *A* resp. *B* zijn. *H* is dus het hoogtepunt van driehoek *ABC*. Merk overigens op dat dit opnieuw bewijst dat de hoogtelijnen van driehoek *ABC* door één punt *H* gaan.



Opgave. Is *O* het middelpunt van de omgeschreven cirkel van driehoek *ABC*, dan is $H = A + B + C$ het hoogtepunt van driehoek *ABC*. Ga na dat

$$|AH|^2 - |BH|^2 = |AC|^2 - |BC|^2 \text{ [bedenk dat } |A| = |B|\text{]}.$$

Definitie. *De afstand van een punt tot een lijn*. Is *k* een lijn en *P* een punt, dan gaat door *P* precies één lijn *l* die loodrecht op *k* staat. Is P' het snijpunt van *k* en *loodlijn l*, dan noemen we P' de *projectie* van *P* op lijn *k* en $\mathrm{d}(P,k) = |PP'|$ is *de afstand van punt P tot lijn k*.

Stel *k* is de lijn met vergelijking $a_1x_1 + a_2x_2 = c$ ofwel $A \cdot X = c$. Dan ligt een punt *X* op de loodlijn *l* door *P* op *k*, als $X = P + tA$. Voor de projectie P' van *P* op lijn *k* geldt

$$A \cdot P' = A \cdot (P + tA) = c \text{ met } t = \frac{c - A \cdot P}{|A|^2}. \text{ Dus } |PP'| = |t| \cdot |A| = \frac{|c - A \cdot P|}{|A|}.$$

2.2.10 De afstand van punt P tot de lijn k met vergelijking $A \cdot X = c$ is

$$\mathrm{d}(P,k) = \frac{|A \cdot P - c|}{|A|}.$$

Zijn k en m twee evenwijdige lijnen, dan hebben alle punten op lijn m dezelfde afstand tot lijn k. We noemen dit de afstand van lijn k tot lijn m, notatie $\mathrm{d}(k,m)$.

2.2.11 Als k en m twee evenwijdige lijnen zijn met vergelijkingen $A \cdot X = c_1$ resp. $A \cdot X = c_2$, dan $\mathrm{d}(k,m) = \mathrm{d}(m,k) = \frac{|c_1 - c_2|}{|A|}$.

Opgave. Is $|XM| = r$ met $r > 0$ de vergelijking van een cirkel, dan is een lijn k een raaklijn aan deze cirkel precies dan, wanneer $\mathrm{d}(k,M) = r$. Lijn k snijdt de cirkel in twee verschillende punten precies dan, wanneer $\mathrm{d}(k,M) < r$. Lijn k heeft geen punten met de cirkel gemeen, als $\mathrm{d}(k,M) > r$.

2.2.12 De afstand van punt C tot lijn AB is gelijk aan

$$\mathrm{d}(C,AB) = \frac{|\det(B-A, C-A)|}{|AB|} = \frac{|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|}{|AB|}.$$

Bewijs. Een vergelijking van lijn AB is $\det(B-A, X-A) = 0$ ofwel

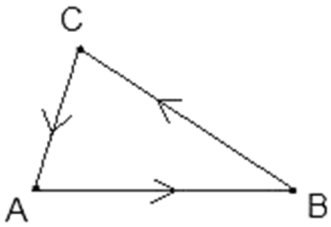
$$(b_2 - a_2)x_1 - (b_1 - a_1)x_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0.$$

Opgave. Stel ABC is een driehoek en P is een punt zo dat $AP \perp BC$ en $BP \perp AC$. Toon aan dat hieruit volgt dat $CP \perp AB$. Dit bewijst nogmaals dat de hoogtelijnen van een driehoek door één punt gaan.

2.3 De (georiënteerde) oppervlakte van een driehoek. Op school hebben we geleerd dat de oppervlakte van een driehoek *ABC* gelijk is aan $\frac{1}{2} \times \text{basis} \times \text{hoogte}$, waarbij de *basis* een zijde of de lengte van die zijde is en de *hoogte* de afstand van de basis tot het hoekpunt er tegenover. De oppervlakte van driehoek *ABC* is volgens deze formule en 2.2.12 gelijk aan:

$$\tfrac{1}{2} \cdot \mathrm{d}(C, AB) \cdot |\, AB \,| = \tfrac{1}{2} |\det(B - A, C - A)| = \tfrac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| .$$

Deze oppervlakte hangt niet af van de keuze van de basis en de bijbehorende hoogte. Ga na dat $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ en dat al deze determinanten gelijk zijn aan $\det(A, B) + \det(B, C) + \det(C, A)$. De bijbehorende pijlen $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ en $\overrightarrow{CA}$ geven de route aan die we volgen als we over de zijden van de driehoek hieronder eerst van *A* naar *B* lopen, daarna van *B* naar *C* en tenslotte weer terug van *C* naar *A*. Het binnengebied van de driehoek houden we hierbij aan onze linkerhand. We lopen *linksom* over de zijden van de driehoek ofwel *tegen de wijzerrichting van de klok in*.



Een driehoek *ABC* hebben we gedefinieerd als een geordend drietal (A, B, C) met verschillende punten *A, B* en *C,* die niet op één lijn liggen. Bij een cyclische verwisseling van de hoekpunten gaat een driehoek over in een driehoek met dezelfde oriëntatie. Dus de driehoeken *BCA* en *CAB* hebben dezelfde oriëntatie als driehoek *ABC,* maar de oriëntatie van *ACB, BAC* en *CBA* is tegengesteld aan die van *ABC*.

Definitie. We noemen de *oriëntatie* van driehoek *ABC positief, negatief* of 0, als

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \det(A, B) + \det(B, C) + \det(C, A)$$

positief, negatief of 0 is.

Bij positieve oriëntatie van driehoek *ABC* lopen we tegen de wijzers van de klok in als we de route $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ en $\overrightarrow{CA}$ volgen. De oriëntatie van driehoek *ABC* is 0, als de drie hoekpunten op één lijn liggen, de driehoek is dan ontaard.

Bij een driehoek *ABC* hoort een *georiënteerde oppervlakte*, die we noteren als $\mathcal{O}(ABC)$.

Definitie. $\mathcal{O}(ABC) = \frac{1}{2} \cdot (\det(A,B) + \det(B,C) + \det(C,A))$.

We noteren de 'gewone', niet-georiënteerde oppervlakte van driehoek *ABC* als $\text{opp}(ABC)$ en stellen $\text{opp}(ABC) = |\mathcal{O}(ABC)|$.

$\mathcal{O}(ABC)$ is positief, negatief of 0 al naar gelang de oriëntatie van driehoek *ABC* positief, negatief of 0 is. Ga na dat

$$\mathcal{O}(ABC) = \mathcal{O}(BCA) = \mathcal{O}(CAB) \text{ en}$$

$$\mathcal{O}(ACB) = \mathcal{O}(BAC) = \mathcal{O}(CBA) = -\mathcal{O}(ABC).$$

2.3.1 Als de affiene afbeelding $F(X) = L(X) + R$ driehoek *ABC* afbeeldt op driehoek $A'B'C'$, dan

$$\mathcal{O}(A'B'C') = \det(L) \cdot \mathcal{O}(ABC),$$

$$\text{opp}(A'B'C') = |\det(L)| \cdot \text{opp}(ABC).$$

Onder *F* blijft de oriëntatie van een driehoek gelijk, als $\det(L) > 0$. We noemen *F* dan *oriëntatiebehoudend*. Als $\det(L) < 0$, dan verandert de oriëntatie van een driehoek in zijn tegengestelde. Als $\det(L) = 1$, dan blijft ook de georiënteerde oppervlakte van een driehoek gelijk. De niet-georiënteerde oppervlakte blijft gelijk, als $|\det(L)| = 1$.

Bewijs. Met $F(X) = L(X) + R$ krijgen we

$$\det(F(B) - F(A), F(C) - F(A)) = \det(L(B) - L(A), L(C) - L(A))$$

$$= \det(L(B - A), L(C - A)) = \det(L) \cdot \det(B - A, C - A).$$

Opgave. Ga na dat de punten *X* zo dat driehoek OE_1X positief georiënteerd is, boven de x-as liggen. Lopen we over de x-as in de richting van de translatie $\overrightarrow{OE_1}$ dan houden we deze punten aan onze linkerhand.

De halfvlakken van een lijn. Een lijn *AB* verdeelt de punten in het vlak die niet op de lijn liggen in twee *halfvlakken* H^+ en H^-. De halfvlakken H^+ en H^- bevatten de punten *X* zo dat driehoek ABX positief resp. negatief georiënteerd is. De meetkundige betekenis hiervan is, dat het halfvlak H^+ aan de linkerkant van lijn *AB* ligt, wanneer we in punt *A* staan met het gezicht in de richting van punt *B*. Het halfvlak H^- ligt dan aan de rechterkant.

Definitie. Als de punten *P* en *Q* in hetzelfde halfvlak van lijn *AB* liggen, dan zeggen we dat *P* en *Q aan dezelfde kant van lijn AB* liggen. Liggen *P* en *Q* in verschillende halfvlakken van lijn *AB*, dan liggen ze *aan verschillende kanten van lijn AB*.

2.3.2 Liggen de punten *P* en *Q* aan dezelfde kant van lijn *AB*, dan liggen ook alle punten tussen *P* en *Q* aan dezelfde kant van lijn *AB* als *P* en *Q*. Liggen *P* en *Q* aan verschillende kanten van lijn *AB*, dan ligt tussen *P* en *Q* een punt van lijn *AB*.

Bewijs. Neem voor het rekengemak even $A = O$. Stel dat $\det(B,P)$ en $\det(B,Q)$ beide $\neq 0$ zijn. Dan $\det(B,(1-t)P+tQ) = 0$ precies dan, wanneer

$$(1-t)\det(B,P) + t\det(B,Q) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{t-1}{t} = \frac{\det(B,P)}{\det(B,Q)} = c$$

$$\Leftrightarrow\; ct = t-1 \;\Leftrightarrow\; t = \frac{1}{1-c}. \text{ Dus } 0 < t < 1 \;\Leftrightarrow c < 0.$$

Definitie. Een deelverzameling *V* van $\mathbb{R}^2$ heet *convex*, wanneer *V* met de punten *P* en *Q* ook alle punten tussen *P* en *Q* bevat.

Een halfvlak is dus een convexe verzameling. Het binnengebied van een hoek is convex [zie het volgende hoofdstuk]. Ook een lijn, een halve lijn en een lijnstuk zijn convexe verzamelingen. Op triviale wijze is de lege verzameling en een verzameling die slechts één punt bevat convex. Het binnengebied van een driehoek is convex. Van een vierhoek die zichzelf niet doorsnijdt is het binnengebied convex. De doorsnede van een eindig of een oneindig aantal convexe verzamelingen is een convexe verzameling.

Opgave. Parallellogram *ABCD* wordt door diagonaal *AC* in twee driehoeken verdeeld. Ga na dat $\mathcal{O}(ABC) = \mathcal{O}(CDA)$ en dat

$$\mathcal{O}(ABC) + \mathcal{O}(CDA) = \det(A,B) + \det(B,C) + \det(C,D) + \det(D,A).$$

Ga na dat we hetzelfde resultaat krijgen met de driehoeken *ABD* en *BCD*.

Definitie. Is *ABCD* een parallellogram, dan

$$\mathcal{O}(ABCD) = \det(A,B) + \det(B,C) + \det(C,D) + \det(D,A) \text{ en}$$

$$\text{opp}(ABCD) = |\mathcal{O}(ABCD)|.$$

Opgave. Als *ABCD* een parallellogram is, dan $\text{opp}(ABCD) = |AB| \cdot \text{d}(C, \text{lijn } AB)$.

Opgave. Toon aan dat $\mathcal{O}(ABC) = \mathcal{O}(XAB) + \mathcal{O}(XBC) + \mathcal{O}(XCA)$, waarin *X* een willekeurig punt in $\mathbb{R}^2$ is. Als de driehoeken *XAB*, *XBC* en *XCA* allemaal een oriëntatie ≥ 0 (of ≤ 0) hebben, dan

$$\text{opp}(ABC) = \text{opp}(XAB) + \text{opp}(XBC) + \text{opp}(XCA).$$

Definitie. Een punt X ligt *binnen* driehoek ABC precies dan, wanneer er getallen $t,u,v>0$ zijn zo dat $X=tA+uB+vC$ en $t+u+v=1$.

Het binnengebied van een driehoek is de doorsnede van drie halfvlakken en dus een convexe verzameling. Het binnengebied van een vierhoek die zichzelf niet doorsnijdt is de doorsnede van vier halfvlakken.

Opgave. Een punt X ligt binnen driehoek ABC precies dan, wanneer de driehoeken XAB, XBC en XCA allemaal dezelfde oriëntatie hebben als driehoek ABC.

Opgave. Een zwaartelijn verdeelt een driehoek in twee driehoeken met dezelfde oppervlakte.

2.4 Spiegelen t.o.v. een lijn.

Definitie. We noemen de punten X en X' elkaars *spiegelbeeld* t.o.v. de lijn *l* wanneer lijn *l* de middelloodlijn van lijnstuk $X'X$ is, wanneer X niet op lijn *l* ligt. Ligt *X* wel op lijn *l*, dan $X' = X$. De afbeelding *S* die *X* afbeeldt op zijn spiegelbeeld X' heet de *spiegeling t.o.v. de lijn l*. De lijn *l* is de *spiegelas* van deze spiegeling.

Het is duidelijk dat een spiegeling een transformatie van $\mathbb{R}^2$ is. Uit de definitie blijkt dat $X' = S(X) \Leftrightarrow X = S(X')$, dus *S* is zijn eigen inverse. Het zal blijken dat *S* een congruentie van $\mathbb{R}^2$ is, waarbij de oriëntatie van driehoeken in zijn tegengestelde overgaat.

We bekijken eerst de spiegeling *S* t.o.v. lijn l door *O* met vergelijking $A \cdot X = 0$ en $|A| = 1$. Een loodlijn op lijn *l* is evenwijdig met de normaal *OA*. Dus het spiegelbeeld X' van *X* kunnen we schrijven als $X' = X + tA$. $M = \frac{1}{2}(X + X')$ ligt op *l*, dus

$$A \cdot (X + X') = A \cdot (2X + tA) = 2A \cdot X + t = 0 \text{ ofwel } t = -2A \cdot X \ .$$

De spiegeling *S* wordt dus gegeven door $S(X) = X' = X - 2(A \cdot X)A$. Hieruit blijkt dat *S* in ieder geval een lineaire transformatie van $\mathbb{R}^2$ is, die dus ook beschreven kan worden als

$$S(X) = x_1 P + x_2 Q \text{ met } P = S(E_1) = E_1 - 2a_1 A,\ Q = S(E_2) = E_2 - 2a_2 A.$$

Ga na dat $S(X) \cdot S(Y) = X \cdot Y$, dus $P \cdot Q = 0$, $|P| = |Q| = 1$ en *S* is een congruentie.

Neem verder nog een punt $B \neq O$ op lijn *l*. Dan $\det(A, B) \neq 0$ en

$$\det(S(A), S(B)) = \det(-A, B) = -\det(A, B)\ ,$$

terwijl ook

$$\det(S(A), S(B)) = \det(S) \cdot \det(A, B)\ .$$

Hieruit volgt $\det(S) = -1$. Dus *S* is een lineaire congruentie van $\mathbb{R}^2$, waarbij de oriëntatie van driehoeken in zijn tegengestelde overgaat. De matrix van *S* wordt gegeven door

$$S = [P, Q] = [E_1 - 2a_1 A, E_2 - 2a_2 A] = \begin{bmatrix} 1 - 2a_1^2 & -2a_1 a_2 \\ -2a_1 a_2 & 1 - 2a_2^2 \end{bmatrix}.$$

2.4.1 De spiegeling *S* t.o.v. de lijn *l* met vergelijking $A \cdot X = 0$ en $|A| = 1$ is de lineaire congruentie $S(X) = X - 2(A \cdot X)A$, waarbij de oriëntatie van driehoeken in zijn tegengestelde overgaat.

Om een punt X te spiegelen t.o.v. een lijn k die niet door O gaan we als volgt te werk. Kies een willekeurig punt P op lijn k en pas de translatie $\overrightarrow{PO}$ toe. Deze translatie beeldt lijn k af op lijn $l \parallel k$ door O en punt X op punt $X - P$. Laat S de spiegeling zijn t.o.v. lijn l. Neem het spiegelbeeld $S(X-P)$ van $X-P$ t.o.v. l. Pas nu de translatie $\overrightarrow{OP}$ toe. Deze translatie brengt $S(X-P)$ naar $S(X-P)+P$ en l naar k. Ga na dat

$$(*)\quad X' = F(X) = S(X-P)+P == S(X)+(P-S(P))$$

inderdaad het spiegelbeeld is van punt X t.o.v. lijn k.

2.4.2 Is S een spiegeling t.o.v. een lijn l door O en is k de lijn door punt P evenwijdig met lijn l, dan wordt de spiegeling F t.o.v. k gegeven door

$$F(X) = S(X-P)+P = S(X)+(P-S(P)),$$

Uit $F(X)-P = S(X-P) \Leftrightarrow \overrightarrow{PF(X)} = S(\overrightarrow{PX})$, met P op de spiegelas van F, blijkt dat de door de spiegeling F geïnduceerde transformatie $F(\overrightarrow{PX})$ van de pijlenruimte met beginpunt P gegeven wordt door $S(\overrightarrow{PX})$.

Als lijn l in 2.4.2 de lijn met vergelijking $A \cdot X = 0$ is, met $|A| = 1$, dan heeft lijn $k \parallel l$ door punt P de vergelijking $A \cdot X = A \cdot P$. De normaal OA snijdt lijn k in het punt $(A \cdot P)A$. We kiezen nu dit snijpunt $(A \cdot P)A$ in plaats van punt P. In plaats van $F(X) = S(X) + (P - S(P)$ krijgen we dan [bedenk dat $S((A \cdot P)A) = -(A \cdot P)A$]

$$(**)\quad F(X) = S(X) + 2(A \cdot P)A = X - 2(A \cdot X)A + 2(A \cdot P)A.$$

Dus:

2.4.3 De spiegeling t.o.v. de lijn $A \cdot X = A \cdot P$ met $|A| = 1$ wordt gegeven door

$$F(X) = X - 2(A \cdot X)A + 2(A \cdot P)A.$$

Hieruit blijkt dat we iedere spiegeling t.o.v. een lijn k in $\mathbb{R}^2$ kunnen schrijven als een spiegeling t.o.v. een lijn $l \parallel k$ door O gevolgd door een translatie. Het omgekeerde geldt niet zonder meer. Is S de spiegeling t.o.v. een lijn l door O, dan is de transformatie $F(X) = S(X) + T$ een spiegeling precies dan, als $F(F(X)) = X$. Dat betekent dat $T + S(T) = O$ ofwel $S(T) = -T$. $S(T) = -T$ betekent dat $OT \perp l$. Met $S(T) = -T$ krijgen we

$$F(X) = S(X) + T = S(X) + \tfrac{1}{2}(T - S(T)) + \tfrac{1}{2}(T + S(T))$$

$$= S(X) + (C - S(C)) \text{ met } C = \tfrac{1}{2}T.$$

2.4.4 Is S een spiegeling t.o.v. een lijn l door O en $F(X) = S(X) + T$, dan liggen de middens $\frac{1}{2}(X + F(X))$ op een lijn k. $F(F(X)) = X + (S(T) + T)$ is een translatie. We kunnen $F(X)$ schrijven als

$$F(X) = S(X) + \tfrac{1}{2}(T - S(T)) + \tfrac{1}{2}(T + S(T)).$$

Hieruit blijkt dat F bestaat uit de spiegeling $G(X) = S(X) + (\frac{1}{2}T - S(\frac{1}{2}T))$ met spiegelas $k \| l$ door punt $\frac{1}{2}T$, gevolgd door de translatie $X \mapsto X + \frac{1}{2}(T + S(T))$ in een richting die evenwijdig is met de lijnen l en k.

F is de spiegeling G precies dan, wanneer $S(T) + T = O$.

Als $S(T) + T \neq O$, dan noemen we F een *schuifspiegeling*.

Opgave. Met een punt B zo dat $|B| = 1$ op de lijn l met vergelijking $A \cdot X = 0$ wordt de spiegeling S t.o.v. l ook gegeven door $S(X) = 2(B \cdot X)B - X$ met matrix

$$S = \begin{bmatrix} 2b_1^2 - 1 & 2b_1b_2 \\ 2b_1b_2 & 2b_2^2 - 1 \end{bmatrix}.$$

Toon dit aan. Bepaal hiermee de matrix van de spiegeling t.o.v. de lijn $2x_1 - 3x_2 = 0$.

Definitie. Is F een affiene transformatie, noemen we een lijn k die door F op zichzelf wordt afgebeeld een *invariante lijn* van F. Een punt dat door F op zichzelf wordt afgebeeld heet een *invariant punt* of een *dekpunt* van F.

Dat een lijn k een invariante lijn van F is betekent dat ieder punt X op k door F op een punt X' wordt afgebeeld dat ook op k ligt. Dit hoeft niet te betekenen dat $X' = X$. Is ieder punt van lijn k een dekpunt van F, dan noemen we k *puntsgewijs invariant*.

Voorbeelden. Bij een spiegeling is de spiegelas puntsgewijs invariant en iedere lijn loodrecht op de spiegelas is invariant, maar niet puntsgewijs invariant. Bij een vermenigvuldiging t.o.v. C is punt C een dekpunt en iedere lijn door C een invariante lijn. Bij een translatie $\overrightarrow{AB}$, met $A \neq B$, zijn er geen dekpunten en is iedere lijn evenwijdig met lijn AB een invariante lijn. Bij een schuifspiegeling die bestaat uit een spiegeling t.o.v. lijn k en een translatie evenwijdig met k, zijn er geen dekpunten en is lijn k de enige invariante lijn.

Een driehoek beschouwen we als een geordend drietal punten, dus als we de driehoeken *ABC* en *DEF* congruent noemen, dan bedoelen we dat er een congruentie *F* is zo dat $F(A) = D$, $F(B) = E$ en $F(C) = F$. Als driehoek *ABC* congruent is met driehoek *DEF*, dan hoeven de driehoeken *ABC* en *EFD* niet congruent te zijn. Een soortgelijke opmerking kunnen we maken bij een gelijkvormigheid. Dat de driehoeken *ABC* en *DEF* congruent zijn, noteren we korter als $ABC \cong DEF$. Dat *ABC* en *DEF* gelijkvormig zijn, noteren we als $ABC \approx DEF$.

2.4.5 Driehoeken zijn congruent precies dan, wanneer de corresponderende zijden even lang zijn.

Bewijs. Onder een congruentie zijn corresponderende lijnstukken even lang. Omgekeerd: stel dat $|AB| = |DE|$, $|BC| = |EF|$ en $|AC| = |DF|$.

(1) Als $A \neq D$, spiegel dan t.o.v. de middelloodlijn van lijnstuk *AD*. Dat brengt *ABC* op $DB'C'$. (2) Als $B' \neq E$, spiegel dan t.o.v. de middelloodlijn van lijnstuk $B'E$. Ga na dat deze middelloodlijn door punt *D* gaat. Dat geeft driehoek DEC''. (3) Als $C'' \neq F$, dan is lijn *DE* de middelloodlijn van lijnstuk $C''F$. Spiegelen t.o.v. lijn *DE* brengt C'' op *F*. Hiermee is driehoek *ABC* d.m.v. hooguit 3 spiegelingen op driehoek *DEF* afgebeeld. Dus $ABC \cong DEF$.

Uit het bewijs van 2.4.5 blijkt:

2.4.6 Een congruentie kan tot stand worden gebracht door hooguit drie spiegelingen.

Opmerking. Later zullen we zien dat het product van twee spiegelingen waarvan de spiegelassen elkaar snijden in punt *P* een *rotatie* om *P* oplevert. Zijn de spiegelassen van beide spiegelingen evenwijdig, dan is het product van beide spiegelingen een translatie. Zie 3.5.6 en 3.5.7.

Toon aan:

2.4.7 Een congruentie *F* van $\mathbb{R}^2$ die een dekpunt heeft, kunnen we tot stand brengen door hooguit 2 spiegelingen.

2.4.8 Een congruentie *F* van $\mathbb{R}^2$ die twee verschillende dekpunten *A* en *B* heeft, is de identieke transformatie van $\mathbb{R}^2$ of een spiegeling t.o.v. lijn *AB*..

[Als $A \neq B$ dekpunten van *F* zijn, dan is lijn *AB* puntsgewijs invariant onder *F*.]

Toon aan:

2.4.9 Een gelijkvormigheid kan tot stand worden gebracht door een congruentie gevolgd door een vermenigvuldiging t.o.v. een punt.

Een afbeelding F van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}^2$ zo dat $|F(X)-F(Y)|=|X-Y|$ voor iedere X en Y wordt een *isometrie* van $\mathbb{R}^2$ genoemd. Onder een isometrie blijven afstanden behouden.

2.4.10 De isometrieën van $\mathbb{R}^2$ zijn precies de congruenties van $\mathbb{R}^2$.

Bewijs. Stel F is een isometrie, dus $|F(X)-F(Y)|=|X-Y|$ voor iedere $X,Y\in\mathbb{R}^2$. Dan $F(X)=F(Y)\Leftrightarrow X=Y$. Stel $F(O)=R$. We bekijken eerst de afbeelding $G(X)=F(X)-R$. Ga na dat G ook een isometrie is en $G(O)=O$. Onder G blijft ook het inproduct behouden, want $X\cdot Y=\frac{1}{2}\left(|X|^2+|Y|^2-|X-Y|^2\right)$. Ook de loodrechte stand van lijnen blijft dus behouden. Stel $G(E_1)=P$ en $G(E_2)=Q$. Dan $|P|=|Q|=1$, $P\cdot Q=0$ en $\det(P,Q)\neq 0$. We kunnen $Y=G(X)$ op precies één manier schrijven als $Y=tP+uQ$. Dan $Y\cdot P=(tP+uQ)\cdot P=t$ en $Y\cdot Q=u$. Dus $t=Y\cdot P=G(X)\cdot G(E_1)=X\cdot E_1=x_1$ en evenzo $u=x_2$. M.a.w. $G(X)=x_1P+x_2Q$ en $F(X)=x_1P+x_2Q+R$. Hiermee is aangetoond dat F een congruentie van $\mathbb{R}^2$ is.

Gevolg:

2.4.11 Een transformatie F van $\mathbb{R}^2$ is een gelijkvormigheid van $\mathbb{R}^2$ precies dan, wanneer onder F alle lengtes van lijnstukken met een factor $r>0$ worden vermenigvuldigd.

[Bekijk de isometrie $G(X)=\frac{1}{r}F(X)$.]

Definitie. Een figuur die door spiegeling t.o.v. lijn k op zichzelf wordt afgebeeld heet *symmetrisch t.o.v. k*. Lijn k is dan een *symmetrieas* van de figuur.

Bij een cirkel is iedere middellijn een symmetrieas van de cirkel. Een lijnstuk AB is symmetrisch t.o.v. zijn middelloodlijn en ook t.o.v. de lijn AB.

3 Hoeken

3.1 Hoeken.

Definitie. Op de lijn AB vormen de punten $X = A + t(B - A)$ met parameter $t \geq 0$ de *halve lijn AB*. We noemen punt A het *beginpunt* van deze halve lijn.

We hebben geen speciale notatie voor een halve lijn. We gebruiken altijd de volledige omschrijving 'halve lijn AB', die alle benodigde informatie bevat. Merk op dat de halve lijn BA een andere halve lijn is, dan de halve lijn AB.

Definitie. De *hoek APB*, notatie $\angle APB$, met $A, B \neq P$ bestaat uit de punten op de halve lijnen PA en PB. Het gemeenschappelijke beginpunt P van beide halve lijnen is het *hoekpunt* van $\angle APB$, de beide halve lijnen PA en PB zijn de *benen* van de hoek. In de notatie $\angle APB$ stelt de middelste letter volgens de meetkundige traditie het hoekpunt voor. De benen van een hoek kunnen samenvallen. Als de benen van een hoek loodrecht op elkaar staan, dan noemen we de hoek een *rechte hoek*. Als de benen van een hoek één rechte lijn vormen, dan noemen we de hoek een *gestrekte hoek*.

Volgens deze definitie is $\angle BPA$ dezelfde hoek als $\angle APB$. Ook $\angle B'PA'$ is dezelfde hoek als $\angle BPA$, wanneer $A', B' \neq P$ punten op de halve lijnen PA resp. PB zijn.

Identieke hoeken hebben hetzelfde hoekpunt en dezelfde benen, *gelijke* hoeken zijn congruente hoeken:

Definitie. Als $\angle APB$ en $\angle CQD$ congruent zijn, dan zeggen we volgens de meetkundige traditie dat $\angle APB$ en $\angle CQD$ *gelijke* hoeken zijn. Dit wordt genoteerd als $\angle APB = \angle CQD$.

Definitie. We noteren $\angle APB$ ook als $\angle(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB})$. Als de benen van $\angle APB$ niet samenvallen en $\angle APB$ is niet een gestrekte hoek, dan ligt een punt X *binnen* de hoek, als er twee getallen $t, u > 0$ zijn zo dat

$$X = P + t(A - P) + u(B - P) \text{ ofwel } \overrightarrow{PX} = t \cdot \overrightarrow{PA} + u \cdot \overrightarrow{PB}.$$

Deze punten X vormen het *binnengebied* van de hoek. Bij een gestrekte hoek kunnen we één van de bijbehorende halfvlakken als het binnengebied van de hoek opvatten. Als de benen van een hoek samenvallen, dan is zijn binnengebied leeg. De punten die niet op de hoek en ook niet binnen de hoek liggen vormen het *buitengebied* van de hoek. Een hoek samen met zijn binnengebied noemen we een *sector*. Ook een hoek samen met zijn buitengebied noemen we een *sector*. Een gestrekte hoek vormt samen met één van zijn halfvlakken een sector.

Opmerking. Bij translaties geldt $-\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AP}$. Als $\overrightarrow{PA}$ een pijl is, dan is $-\overrightarrow{PA}$ de pijl met beginpunt *P* die even lang is als pijl $\overrightarrow{PA}$, maar de tegengestelde richting heeft. Er geldt $\overrightarrow{PX} = -\overrightarrow{PA} \Leftrightarrow X - P = P - A \Leftrightarrow X = 2P - A$ [*P* is het midden van lijnstuk *XA*].

Toon aan:

- Twee hoeken zijn congruent precies dan, wanneer ze gelijkvormig zijn.

- Als $t, u > 0$ of $t, u < 0$, dan $\angle(t \cdot \overrightarrow{PA}, u \cdot \overrightarrow{PB}) = \angle(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB})$.

- Alle rechte hoeken zijn gelijk aan $\angle E_1 O E_2$.

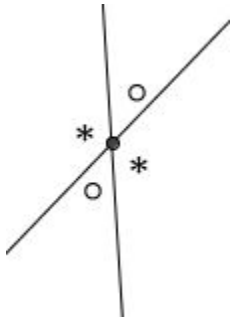
- Alle gestrekte hoeken zijn gelijk aan $\angle E_1 O(-E_1)$.

Definitie. *Optellen van hoeken*. Als $C \neq P$ een punt binnen of op $\angle(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB})$ is, dan noemen we $\angle(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB})$ de *som* van de hoeken $\angle(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC})$ en $\angle(\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PB})$. Notatie: $\angle(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}) + \angle(\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PB}) = \angle(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB})$. Hierin mogen we elk van de hoeken vervangen door een gelijke hoek. Als $\angle APB$ een gestrekte hoek is, dan mag *C* elk punt $\neq P$ zijn. De volgorde waarin we de hoeken optellen doet er niet toe. Verder stellen we dan

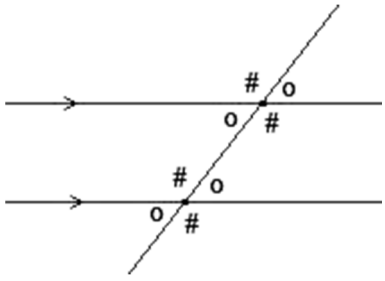
$$\angle(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}) = \angle(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}) - \angle(\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PB}) \Leftrightarrow \angle(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}) + \angle(\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PB}) = \angle(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}).$$

Twee hoeken, waarvan de som een gestrekte hoek is, noemen we elkaars *supplement*. Twee hoeken, waarvan de som een rechte hoek is, noemen we elkaars *complement*.

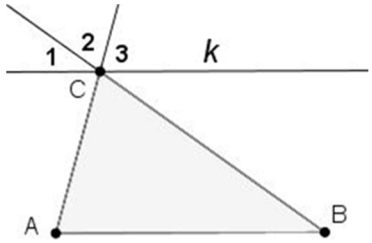
Het snijpunt van twee lijnen kunnen we beschouwen als het hoekpunt van vier verschillende hoeken. Een paar hoeken met dezelfde symbolen in de figuur hiernaast noemen we een paar *overstaande hoeken*, een paar hoeken met verschillende symbolen noemen we een paar *nevenhoeken*. Ga na dat overstaande hoeken gelijk zijn en dat de som van een paar nevenhoeken een gestrekte hoek is.



In de figuur hiernaast worden twee evenwijdige lijnen gesneden door een derde lijn. Bij elk van de snijpunten zijn de overstaande hoeken gelijk en zijn de nevenhoeken elkaars supplement. Verder zijn de hoeken bij het ene snijpunt het translatiebeeld van de hoeken bij het andere snijpunt. De hoeken die elkaars translatiebeeld zijn, zijn gelijk aan elkaar. In de figuur zijn hoeken met hetzelfde symbool gelijk en is de som van twee hoeken met verschillende symbolen een gestrekte hoek.



3.1.1 De som van de hoeken van een driehoek is gelijk aan een gestrekte hoek.

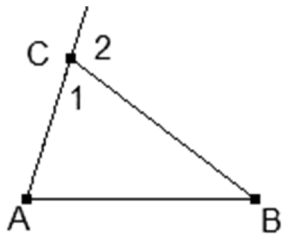


Bewijs. Zie de figuur hiernaast. Lijn *k* door *C* is evenwijdig met lijn *AB*. De hoeken van driehoek *ABC* duiden we aan met $\angle A, \angle B, \angle C$. Verder is $\angle C_3$ het translatiebeeld van $\angle A$ onder de translatie $\overrightarrow{AC}$, dus $\angle A = \angle C_3$. Evenzo is $\angle C_1$ het translatiebeeld van $\angle B$, dus $\angle B = \angle C_1$. Tenslotte zijn $\angle C$ en $\angle C_2$ overstaande hoeken, dus is

$$\angle A + \angle B + \angle C = \angle C_1 + \angle C_2 + \angle C_3 .$$

een gestrekte hoek.

3.1.2 In een driehoek is een *buitenhoek* gelijk aan de som van de *niet-aanliggende binnenhoeken.*



Opmerking. In de figuur hiernaast is hoek $\angle C_2$ een *buitenhoek* van de *aanliggende binnenhoek* $\angle C_1$ en $\angle A$ en $\angle B$ zijn de bijbehorende *niet-aanliggende binnenhoeken*.

Bewijs. $\angle C_1 + \angle C_2$ en $\angle A + \angle B + \angle C_1$ zijn gelijk aan een gestrekte hoek. Dus $\angle C_2 = \angle A + \angle B$.

Opgave. Een punt *P* ligt binnen driehoek *ABC* precies dan, wanneer *P* binnen de hoeken $\angle BAC$ en $\angle ABC$ ligt. Toon aan dat *P* dan ook binnen $\angle ACB$ ligt.

Definitie. De cosinus van een hoek.

$$\cos\angle(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}) = \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}}{|PA| \cdot |PB|} .$$

We zullen zo meteen zien dat bovenstaande definitie in overeenstemming is met hetgeen we nog van school weten over de cosinus van een hoek. Ga na de waarde van $\cos\angle(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB})$ niet verandert, als we *A* en *B* verwisselen of vervangen door A' en B' zo dat $PA' = t \cdot \overrightarrow{PA}$ en $PB' = u \cdot \overrightarrow{PB}$ met $t, u > 0$.

Uit 2.1.7 [de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz] volgt:

3.1.3 $\quad -1 \le \cos\angle(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}) \le 1$

Ga na dat de cosinus van een gestrekte hoek gelijk aan -1 is. De cosinus van een rechte hoek is gelijk aan 0 en wanneer de benen van de hoek samenvallen is de cosinus gelijk aan 1. Als $0 < \cos\angle(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}) < 1$, dan noemen we $\angle(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB})$ een *scherpe hoek*. Als $-1 < \cos\angle(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}) < 0$, dan noemen we $\angle(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB})$ een *stompe hoek*.

We kunnen $\dfrac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}}{|PA|\cdot|PB|}$ ook schrijven als $\dfrac{\overrightarrow{PA}}{|PA|}\cdot\dfrac{\overrightarrow{PB}}{|PB|}$.

Dit is een inproduct van pijlen met lengte 1. Het kan dus geen kwaad om te veronderstellen dat in $\angle(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB})$ de punten A en B zo gekozen zijn dat $|PA|=|PB|=1$. Inproducten van pijlen en ook lengtes van pijlen blijven behouden onder een congruentie, dus congruente hoeken hebben dezelfde cosinus. Dit geldt i.h.b. voor een translatie. We kunnen er dus zonder de algemeenheid tekort te doen voor zorgen dat O het hoekpunt is en dat A en B op de eenheidscirkel liggen. We kunnen ons daarom zonder bezwaar beperken tot hoeken $\angle(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ met A en B op de eenheidscirkel. Voor zulke hoeken geldt

$$\cos\angle(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = A\cdot B = a_1b_1 + a_2b_2 .$$

3.1.4 Hoeken zijn gelijk precies dan, wanneer hun cosinussen gelijk zijn.

Bewijs. Dat gelijke, d.w.z. congruente, hoeken dezelfde cosinus hebben we hierboven al aangetoond. Het omgekeerde geldt ook. Stel $\cos\angle(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = A\cdot B = p$. Volgens 3.1.3 geldt dan $-1 \le p \le 1$. P is het punt op de eenheidscirkel met coördinaten $(p,\sqrt{1-p^2})$. Dan ook $\cos\angle(\overrightarrow{OE_1},\overrightarrow{OP}) = E_1\cdot P = p$. We gaan na dat $\angle(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ en $\angle(\overrightarrow{OE_1},\overrightarrow{OP})$ congruent zijn. Een lineaire congruentie L die E_1 op A afbeeldt wordt gegeven door

$$L = \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{bmatrix} \text{ met } \det(L) = 1 .$$

De inverse congruentie L^{-1} vinden we met 1.1.4 [regel van Kramer]. Ga na dat

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix}$$

en

$$L^{-1}(A) = E_1,\ L^{-1}(B) = \big(A\cdot B,\ \det(A,B)\big) = \Big(p, \pm\sqrt{1-p^2}\Big).$$

Als het plusteken geldt, dan $L^{-1}(B) = P$. Als het minteken geldt, dan passen we nog een spiegeling t.o.v. de x-as toe om hoek $\angle(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ op $\angle(\overrightarrow{OE_1},\overrightarrow{OP})$ af te beelden. [De spiegeling t.o.v. de x-as is de congruentie $[E_1,-E_2]$ ofwel $(x,y)\mapsto(x,-y)$.]

Is $\angle(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD})$ een andere hoek zo dat $\cos\angle(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}) = p$, dan volgt met eenzelfde redenering dat ook $\angle(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD})$ en hoek $\angle(\overrightarrow{OE_1},\overrightarrow{OP})$ congruent zijn. Dus ook de hoeken $\angle(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ en $\angle(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD})$ zijn congruent.

Uit het bewijs van 3.1.4 blijkt verder nog:

3.1.5 Bij iedere hoek $\angle(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB})$ is er precies één punt *C* op de eenheidscirkel en boven of op de x-as zo dat de hoeken $\angle(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB})$ en $\angle(\overrightarrow{OE_1},\overrightarrow{OC})$ gelijk zijn. De x-coördinaat van punt *C* is gelijk aan $\cos\angle(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB})$. Definiëren we de sinus van $\angle(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB})$ d.m.v.

$$\sin\angle(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}) = \frac{|\det(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB})|}{|PA|\cdot|PB|},$$

dan is de y-coördinaat van punt *C* gelijk aan $\sin\angle(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB})$.

Opmerking. Als *A* en *B* op de eenheidscirkel liggen, dan $\sin\angle AOB = |\det(A,B)|$.

Opgave. Toon aan dat $(A\cdot B)^2 + (\det(A,B))^2 = 1$, als *A* en *B* op de eenheidscirkel liggen.

Bij een grotere hoek hoort een kleinere cosinus:

Definitie. $\angle(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}) > \angle(\overrightarrow{QC},\overrightarrow{QD}) \;\Leftrightarrow\; \cos\angle(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}) < \cos\angle(\overrightarrow{QC},\overrightarrow{QD})$.

Opmerking. Een scherpe hoek is kleiner dan een rechte hoek, een stompe hoek is groter dan een rechte hoek. De grootste hoeken zijn de gestrekte hoeken. De kleinste hoeken zijn de hoeken, waarvan de benen samenvallen [en die dus eigenlijk maar uit één halve lijn bestaan].

Opgave. $\sin\angle(-\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}) = \sin\angle(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB})$, terwijl $\cos\angle(-\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}) = -\cos\angle(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB})$. Ga na dat $\angle(-\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}) + \angle(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}) = \angle(-\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}) + \angle(\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PA}) = \angle(-\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PA})$. Deze laatste hoek is een gestrekte hoek, dus de hoeken $\angle(-\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB})$ en $\angle(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB})$ zijn elkaars supplement.

Uit de laatste opgave blijkt:

3.1.6 Twee ongelijke hoeken hebben dezelfde sinus precies dan, wanneer de som van deze hoeken een gestrekte hoek is. Hun cosinussen zijn dan tegengesteld.

Uit de definities van $\cos\angle(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB})$ en $\sin\angle(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB})$ volgt:

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB} = |PA|\cdot|PB|\cdot\cos\angle(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB})$$

$$|\det(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB})| = |PA|\cdot|PB|\cdot\sin\angle(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}).$$

Opmerking. We zagen eerder dat de oppervlakte van driehoek *ABC* gelijk is aan $\frac{1}{2}\cdot|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})|$. Dus

$$\text{opp}(ABC)=\tfrac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|AC|\cdot\sin\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}).$$

Hoeken en zijden in een driehoek.
De hoeken $\angle BAC$, $\angle ABC$ en $\angle ACB$ in driehoek *ABC* worden meestal kortweg geschreven als $\angle A$, $\angle B$ resp. $\angle C$. De lengten van de zijden tegenover deze hoeken schrijven we als *a*, *b* resp. *c*. Dus $|AB|=c$, $|AC|=b$ en $|BC|=a$. Met deze notatie geldt

$$\text{opp}(ABC)=\tfrac{1}{2}bc\sin\angle A.$$

3.1.7 *Cosinusregel*. In driehoek *ABC* geldt:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\angle C.$$

Opmerking. Soortgelijke formules gelden natuurlijk met $\angle A$ en $\angle B$.

Bewijs.
$$\begin{aligned}c^2&=|AB|^2=(A-B)^2=\big((A-C)-(B-C)\big)^2\\&=(A-C)^2+(B-C)^2-2\cdot(A-C)\cdot(B-C)\\&=|AC|^2+|BC|^2-2\cdot(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB})\\&=|BC|^2+|AC|^2-2\cdot|CA|\cdot|CB|\cdot\cos\angle(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})\\&=a^2+b^2-2ab\cos\angle C.\end{aligned}$$

3.1.8 *Rechthoekige driehoek.*
Als $\angle C$ in driehoek *ABC* een rechte hoek is, dan:

(1) $c^2=a^2+b^2$ (*stelling van Pythagoras*).

(2) $$\cos\angle A=\frac{b}{c}=\frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}},$$

$$\sin\angle A=\frac{a}{c}=\frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}.$$

(3) $\angle A$ en $\angle B$ zijn elkaars complement en $\cos\angle A=\sin\angle B$, $\sin\angle A=\cos\angle B$.

Bewijs. (1) volgt direct uit de cosinusregel.

Wat betreft (2): Volgens de cosinusregel geldt

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\angle A,$$

dus $\cos\angle A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. Met (1) geeft dit $\cos\angle A=\dfrac{b}{c}$.

Verder $(\sin\angle A)^2 = 1-(\cos\angle A)^2 = 1-\dfrac{b^2}{c^2} = \dfrac{c^2-b^2}{c^2} = \dfrac{a^2}{c^2}$.

Dus $\sin\angle A = \dfrac{a}{c}$, want $\sin\angle A > 0$. Toon zelf nog onderdeel (3) aan.

De schuine zijde van een rechthoekige driehoek wordt ook de *hypotenusa* van de driehoek genoemd.

3.1.9 *Sinusregel.* In driehoek *ABC* geldt

$$\frac{\sin\angle A}{a} = \frac{\sin\angle B}{b} = \frac{\sin\angle C}{c}.$$

Bewijs. Dit volgt direct uit $2\cdot\text{opp}(ABC) = bc\sin\angle A = ac\sin\angle B = ab\sin\angle C$. [Deel door abc.]

Uit 3.1.1 en de sinusregel volgt:

3.1.10 Een driehoek heeft twee gelijke zijden precies dan, wanneer de hoeken tegenover die zijden gelijk zijn. Een driehoek heeft drie gelijke zijden precies dan, wanneer alle hoeken van de driehoek gelijk zijn.

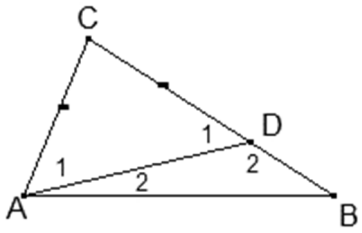
[Een driehoek met twee gelijke zijden heet *gelijkbenig*, een driehoek met drie gelijke zijden heet *gelijkzijdig*.]

Bewijs. Als $\angle A = \angle B$, dan volgt uit de sinusregel dat $a = b$.Omgekeerd: als $a = b$, dan $\sin\angle A = \sin\angle B$ volgens de sinusregel. Dat betekent dat òf $\angle A = \angle B$ óf dat $\angle A + \angle B$ gelijk aan een gestrekte hoek is [zie 3.1.5]. Dit laatste kan niet, want dan zou volgens 3.1.1 driehoek *ABC* ontaard zijn. Blijft over $\sin\angle A = \sin\angle B$.

3.1.11 In een driehoek ligt tegenover een langere zijde een grotere hoek en omgekeerd.

Bewijs. Stel in driehoek *ABC* geldt $|BC| > |AC|$. Dan is er een punt *D* op zijde *BC* zo dat $DC = AC$. Zie de figuur hiernaast, waarin

$$\angle A_1 = \angle D_1 \text{ en } \angle D_1 = \angle A_2 + \angle B.$$



Dan

$$\angle A = \angle A_1 + \angle A_2 = \angle D_1 + \angle A_2$$
$$= \angle B + 2\cdot\angle A_2.$$

Dus $\angle A > \angle B$. Omgekeerd:

Uit $\angle A > \angle B$ volgt natuurlijk $|BC| > |AC|$.

[Want $|BC| \le |AC|$ zou betekenen dat ook $\angle A \le \angle B$.]

3.1.12 Een hoek $\angle APB$, die niet een gestrekte hoek is, heeft precies één symmetrieas. We noemen deze symmetrieas de *bissectrice* van de hoek.

Bewijs. Neem op de halve lijn *PB* het punt B' zo dat $|PB'| = |PA|$. Dan is de middelloodlijn van lijnstuk AB' de symmetrieas van $\angle APB$.

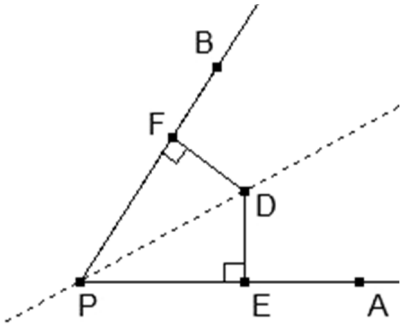
Een gestrekte hoek heeft twee symmetrieassen, de ene is de lijn waarop de benen van de hoek liggen, die andere staat hier loodrecht op en gaat door het hoekpunt. De laatste lijn noemen we de bissectrice van de gestrekte hoek.

Opmerking. In 3.1.12 is de bissectrice van een hoek gedefinieerd als een lijn. Vaak is met de bissectrice ook de halve lijn bedoeld, die bestaat uit de punten van de symmetrieas die op of binnen de hoek liggen.

3.1.13 Een punt $D \neq P$ ligt op de bissectrice van de niet-gestrekte $\angle APB$ precies dan, wanneer $\mathrm{d}(D, PA) = \mathrm{d}(D, PB)$.

[*D* hoeft niet binnen $\angle APB$ te liggen.]

Bewijs. De loodlijn door $D \neq P$ op lijn *PA* snijdt *PA* in *E*. De loodlijn door *D* op lijn *PB* snijdt *PB* in *F*. Als *DP* de bissectrice is van $\angle APB$, dan gaat bij spiegelen t.o.v. *DP* lijn *PA* over in lijn *PB*. Loodrechte stand blijft behouden, dus de lijnstukken *DE* en *DF* zijn elkaars spiegelbeeld en even lang. Omgekeerd: als $|DE| = |DF|$, dan vinden we met Pythagoras dat ook $|PE| = |PF|$, dus de driehoeken *PED* en *PFD* zijn congruent. Ze zijn elkaars spiegelbeeld t.o.v. lijn *PD*. Ook de lijnen *PA* en *PB* zijn dan elkaars spiegelbeeld t.o.v. lijn *PD*, m.a.w. lijn *PD* is de bissectrice van $\angle APB$.



Opgave. Toon aan dat de bissectrices van de hoeken van een driehoek *PQR* door één punt *N* gaan. *N* is het middelpunt van *ingeschreven cirkel* van driehoek *PQR*.

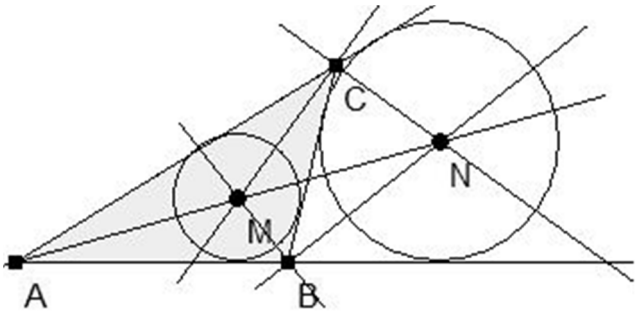
Opgave. Liggen de punten $C, D \neq P$ op de benen van de $\angle APB$ en is $\angle APB$ niet een gestrekte hoek, dan liggen alle punten tussen *C* en *D* binnen $\angle APB$. Toon dit aan.

Opgave. Is *P* een punt binnen driehoek *ABC*, dan snijdt een lijn door *P*, die niet door een hoekpunt van de driehoek gaat, precies 2 zijden (opgevat als lijnstukken) van de driehoek.

In een driehoek ABC noemen we de bissectrice van $\angle C$ ook wel de *binnenbissectrice* van $\angle C$. De bissectrice van een buitenhoek van $\angle C$ noemen we dan een *buitenbissectrice* van $\angle C$. Beide bissectrices staan loodrecht op elkaar. Toon dit aan.

Opgave. Als de binnen- of buitenbissectrice van $\angle C$ zijde *AB* van driehoek *ABC* snijdt in punt *D*, dan

$$\text{opp}(ADC) : \text{opp}(BDC) = |AC| : |BC| = |AD| : |BD| .$$



Het snijpunt van de drie binnenbissectrices van driehoek *ABC* is het middelpunt *M* van de *ingeschreven cirkel* van de driehoek. Punt *M* heeft gelijke afstanden tot de zijden van de driehoek. Punt *N* het snijpunt van de binnenbissectrice van $\angle A$ en de buitenbissectrices van $\angle B$ en $\angle C$. Ook punt *N* heeft gelijke afstanden tot de zijden van de driehoek. *N* is het middelpunt van een *aangeschreven cirkel* van de driehoek. Deze cirkel raakt aan (het verlengde van) de zijden van driehoek *ABC*.

Opgave. *Meetkundige betekenis van het inproduct*. Als $A, B \neq P$ en A' is de projectie van punt *A* op lijn *PB*, dan $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = |PA'| \cdot |PB|$, als $\overrightarrow{PA'}$ en $\overrightarrow{PB}$ dezelfde richting hebben, en $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = -|PA'| \cdot |PB|$, als $\overrightarrow{PA'}$ en $\overrightarrow{PB}$ tegengestelde richting hebben.

Via $\text{opp}(ABC) = \frac{1}{2} \cdot |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|$ is de oppervlakte van driehoek *ABC* simpel te berekenen. De volgende klassieke formule, die de oppervlakte van een driehoek *ABC* uitdrukt in de lengtes *a*, *b* en *c* van de zijden, behoort tot de meetkundige folklore.

3.1.14 $\text{opp}(ABC) = \frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}$
$= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}$.

Bewijs. $\left(\text{opp}(ABC)\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot \sin^2 \angle C = \frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot b^2 - \frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot \cos^2 \angle C$. Uit de cosinusregel volgt $2ab \cos \angle C = a^2 + b^2 - c^2$.

Dus $16\cdot\left(\text{opp}(ABC)\right)^2 = 4\cdot a^2\cdot b^2 - 4\cdot a^2\cdot b^2\cdot\cos^2\angle C$

$= 4\cdot a^2\cdot b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2$.

$= (2ab+(a^2+b^2-c^2))(2ab-(a^2+b^2-c^2))$

$= ((a+b)^2-c^2)(c^2-(a-b)^2)$

$= (a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)$

Opmerking. De laatste uitdrukking wordt ook geschreven als

$$2s(2s-2c)(2s-2b)(2s-2a),$$

waarin $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ staat voor *semiperimeter* (= halve omtrek).

Dat geeft de *formule van Heron* $\text{opp}(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Opgave. Iedere hoek van een gelijkzijdige driehoek is gelijk aan $\angle E_1OA$ met $A = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$. Dus de cosinus van zo'n hoek is gelijk aan $\frac{1}{2}$ en de sinus is gelijk aan $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Toon dit aan.

3.2 Georiënteerde hoeken.

Stel $A(a_1, a_2)$ en $B(b_1, b_2)$ zijn punten op de eenheidscirkel met $a_2, b_2 \geq 0$ en we duiden $\angle E_1OA$ en $\angle E_1OB$ aan met de Griekse letters α en β. Dan

$$A = (\cos\alpha, \sin\alpha) \text{ en } B = (\cos\beta, \sin\beta).$$

Als $\alpha > \beta$, dan $\beta + \angle AOB = \alpha$ ofwel $\angle AOB = \alpha - \beta$. Dus

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\angle AOB = A \cdot B = a_1b_1 + a_2b_2 = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

en

$$\sin(\alpha - \beta) = |\det(A, B)| = |a_1b_2 - a_2b_1| = |\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta|.$$

Merk op dat in de formules $\cos(\alpha - \beta) = A \cdot B$ en $\sin(\alpha - \beta) = |\det(A, B)|$ het rechterlid niet van waarde verandert, als we *A* en *B* en dus ook α en β verwisselen. In het linkerlid is echter $\alpha - \beta$ door de definitie voorafgaande aan 3.1.1 alleen maar gedefinieerd, als $\alpha > \beta$. Weliswaar geldt $\angle AOB = \angle BOA$, maar we kunnen niet zeggen dat $\alpha - \beta = \beta - \alpha$. We kunnen hiermee samenhangende problemen oplossen door over te gaan op *georiënteerde hoeken*. Bij een georiënteerde hoek is de volgorde van de benen van belang.

Definitie. *Georiënteerde hoek*. Een *georiënteerde* hoek is een geordend tweetal halve lijnen (PA, PB) met een gemeenschappelijk beginpunt *P*, het hoekpunt van de hoek. We noteren deze hoek als $\sphericalangle APB$ en ook als $\sphericalangle(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB})$.

Dus $\sphericalangle APB$ en $\sphericalangle BPA$ zijn verschillende hoeken. Dat het om georiënteerde hoeken gaat blijkt uit het symbool $\sphericalangle$ en zeggen we er meestal niet expliciet bij. Gebruik van de notatie $\sphericalangle APB$ impliceert dat $A, B \neq P$.

Definitie. De *oriëntatie* van $\sphericalangle APB$ ofwel $\sphericalangle(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB})$ is *positief*, *negatief* resp. 0, als $\det(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}) > 0$, $\det(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}) < 0$ resp. $\det(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}) = 0$. De oriëntatie van $\sphericalangle APB$ is dus gelijk aan de oriëntatie van driehoek *PAB*.

Voorbeeld. $\sphericalangle E_1OE_2$ is positief georiënteerd. De hoeken $\sphericalangle APB$ en $\sphericalangle BPA$ hebben een tegengestelde oriëntatie.

Definitie. *Gelijkheid van georiënteerde hoeken*.
We noemen $\sphericalangle APB$ en $\sphericalangle CPD$ *gelijk*, notatie $\sphericalangle APB = \sphericalangle CQD$, wanneer beide hoeken dezelfde oriëntatie hebben en de corresponderende niet-georiënteerde hoeken $\angle APB$ en $\angle CPD$ gelijk zijn.

Uit deze definitie volgt, dat een georiënteerde hoek onder een oriëntatiebehoudende gelijkvormigheid overgaat in een gelijke georiënteerde hoek.

Toon aan:

3.2.1 Bij een georiënteerde hoek $\sphericalangle APB$ is er precies één punt $C(c_1, c_2)$ op de eenheidscirkel zo dat $\sphericalangle APB = \sphericalangle E_1OC$. Neem hiertoe

$$c_1 = \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}}{|PA| \cdot |PB|} \text{ en } c_2 = \frac{\det(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB})}{|PA| \cdot |PB|} .$$

[Merk op dat punt *C* nu ook onder de x-as kan liggen.]

Vanwege 3.2.1 kunnen we ons zonder bezwaar beperken tot georiënteerde hoeken $\sphericalangle AOB$ met A en B op de eenheidscirkel. Ga na dat $\sphericalangle E_1OA$ een positieve resp. negatieve oriëntatie heeft, als *A* boven resp. onder de x-as ligt. Ligt *A* op de x-as, dan heeft $\sphericalangle E_1OA$ de oriëntatie 0.

Definitie. Cosinus en sinus voor georiënteerde hoeken.
Voor $\sphericalangle AOB = \sphericalangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ met A en B op de eenheidscirkel stellen we

$$\cos \sphericalangle AOB = A \cdot B \text{ en } \sin \sphericalangle AOB = \det(A, B) .$$

Merk op dat de cosinus van $\sphericalangle AOB$ gelijk blijft, als we *A* en *B* verwisselen, maar dat de sinus hierbij in zijn tegengestelde overgaat.

Toon aan:

3.2.2 Met *A*, *B*, *C* en *D* op de eenheidscirkel geldt:

$\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD$ precies dan, wanneer $A \cdot B = C \cdot D$ en $\det(A, B) = \det(C, D)$.

Opmerking. Als $A \cdot B = C \cdot D$, dan ook $|\det(A, B)| = |\det(C, D)|$. Voor de gelijkheid van de hoeken is het dus voldoende dat $A \cdot B = C \cdot D$ en dat de beide determinanten hetzelfde teken hebben.

Voor niet-georiënteerde hoeken geldt

$$\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC \text{ en } \angle AOB = \angle AOC - \angle BOC$$

onder de voorwaarde dat punt *B* binnen of op de hoek $\angle AOC$ ligt.

Voor georiënteerde hoeken stellen we zonder extra voorwaarde:

Definitie. $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC = \sphericalangle AOC$ en $\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOC - \sphericalangle BOC$.

Elk van deze hoeken mogen we vervangen door een gelijke hoek.

We kunnen $\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOC - \sphericalangle BOC$ ook schrijven als $\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOC + \sphericalangle COB$. Het aftrekken van georiënteerde hoeken hebben we dus niet echt nodig. Voor georiënteerde hoeken stellen we:

Definitie. $-\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOA$.

Met deze definitie krijgen we

$$\sphericalangle AOB - \sphericalangle COD = \sphericalangle AOB + (-\sphericalangle COD) = \sphericalangle AOB + \sphericalangle DOC .$$

Gebruiken we de Griekse letters α, β, γ voor de georiënteerde hoeken $\sphericalangle E_1OA$, $\sphericalangle E_1OB$ en $\sphericalangle E_1OC$ met *A*, *B* en *C* op de eenheidscirkel, dan geldt volgens de laatste definitie $\sphericalangle AOB = \beta - \alpha$, ongeacht de onderlinge ligging van *A* en *B*. Verder:

$$\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC = (\beta - \alpha) + (\gamma - \beta) = \gamma - \alpha = \sphericalangle AOC .$$

Voor $\cos \sphericalangle AOB$ en $\sin \sphericalangle AOB$ geldt:

$$\cos(\beta - \alpha) = A \cdot B = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta ,$$

$$\sin(\beta - \alpha) = \det(A, B) = \cos\alpha \sin\beta - \sin\alpha \cos\beta .$$

Voor $\cos(-\alpha)$ en $\sin(-\alpha)$ geldt:

$$\cos(-\alpha) = A \cdot E_1 = a_1 = \cos\alpha$$

$$\sin(-\alpha) = \det(A, E_1) = -a_2 = -\sin\alpha .$$

Met $-\alpha$ i.p.v. α in de formules voor $\cos(\beta - \alpha)$ en $\sin(\beta - \alpha)$ krijgen we:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta ,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha \cos\beta .$$

We kunnen nu ook de som twee niet-georiënteerde hoeken algemener definiëren dan in paragraaf 3.1. Dit maakt het mogelijk dat we ook bijv. twee stompe hoeken kunnen optellen.

Definitie. *De som van de niet-georiënteerde hoeken* $\angle AOB$ en $\angle COD$.
Als $\sphericalangle AOB$ en $\sphericalangle COD$ dezelfde oriëntatie hebben en

$$\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD = \sphericalangle POQ ,$$

dan stellen we

$$\angle AOB + \angle COD = \angle POQ .$$

[Omdat $\angle AOB = \angle BOA$ en $\angle COD = \angle DOC$ kunnen we er altijd voor zorgen dat de bijbehorende georiënteerde hoeken dezelfde oriëntatie hebben.]

Griekse letters $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ zullen we, zoals we net al deden, gebruiken voor al dan niet georiënteerde hoeken $\angle E_1OA$, $\angle E_1OB$, $\angle E_1OC$, … resp. $\sphericalangle E_1OA$, $\sphericalangle E_1OB$, $\sphericalangle E_1OC$, … met *A*, *B*, *C*, … op de eenheidscirkel. Of een georiënteerde of niet-georiënteerde hoek bedoeld is, moet blijken uit de context.

De Griekse letter π reserveren we hier als naam van de hoek $\angle E_1O(-E_1)$ of $\sphericalangle E_1O(-E_1)$. De Griekse letter o gebruiken we voor $\angle E_1OE_1$ of $\sphericalangle E_1OE_1$. De letters o en π stelt hier niet getallen voor, maar zijn *namen* van bepaalde hoeken.

We gebruiken $\frac{1}{2}\pi$ als naam voor de hoeken $\angle E_1OE_2$ en $\sphericalangle E_1OE_2$. Om voor de hand liggende redenen gebruiken we verder nog de namen $\frac{1}{3}\pi$ en $\frac{1}{4}\pi$ voor de hoeken $\angle E_1OA$ en $\sphericalangle E_1OA$ met $A = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ [zie de laatste opgave van paragraaf 3.1] resp. $A = (\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$.

We hebben gezien dat iedere georiënteerde hoek gelijk is aan precies één hoek $\sphericalangle E_1OA$ met *A* op de eenheidscirkel. Bij een positief georiënteerde hoek ligt *A* boven de x-as. Bij een negatief georiënteerde hoek ligt *A* onder de x-as. Iedere niet-georiënteerde hoek is gelijk aan precies één hoek $\angle E_1OA$, waarin *A* een punt op de eenheidscirkel is, dat boven of op de x-as ligt.

We schrijven $\alpha + \alpha$ als $2 \cdot \alpha$ of korter als 2α. Dus $2 \cdot \frac{1}{2}\pi = \pi$ en $2 \cdot \pi = o$. Evenzo $\alpha + \alpha + \alpha = 3\alpha$, $\alpha + \alpha + \alpha + \alpha = 4\alpha$, etc.

Opgave. Toon aan $2 \cdot \alpha = o \Leftrightarrow \alpha = o$ of $\alpha = \pi$. Dus ook:

$$\boxed{2 \cdot \alpha = 2 \cdot \beta \;\Leftrightarrow\; \alpha = \beta \text{ of } \alpha = \beta + \pi}.$$

Opmerking. Een som van niet-georiënteerde hoeken is nooit groter dan een gestrekte hoek. Als α een stompe hoek is, dan kan $2 \cdot \alpha$ een scherpe hoek zijn.

Tussen twee georiënteerde hoeken is de relatie 'groter dan' of 'kleiner dan' niet gedefinieerd. De begrippen stompe en scherpe hoek zijn dus niet van toepassing op georiënteerde hoeken.

Ga na dat $\sphericalangle(-A)O(-B) = \sphericalangle AOB$. I.h.b. geldt voor de georiënteerde gestrekte hoek $\pi = \sphericalangle E_1O(-E_1)$ dat $-\pi = \sphericalangle(-E_1)OE_1 = \sphericalangle E_1O(-E_1) = \pi$. Ook $-o = o$. Verder geldt $\sphericalangle(-A)OB = \sphericalangle AO(-B) = \sphericalangle AOB + \sphericalangle BO(-B) = \sphericalangle AOB + \pi$.

Opgave. Als $\alpha = \sphericalangle E_1OA$, dan $-\alpha = \sphericalangle E_1O\bar{A}$, waarin *A* en $\bar{A}$ elkaars spiegelbeeld t.o.v. de x-as zijn.

Nemen we in het bewijs van 3.1.1 [de som van de hoeken in een driehoek is gelijk aan een gestrekte hoek] georiënteerde hoeken $\sphericalangle C_1 = \sphericalangle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$, $\sphericalangle C_2 = \sphericalangle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ en $\sphericalangle C_3 = \sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ krijgen we de volgende versie voor georiënteerde hoeken:

3.2.3 In driehoek *ABC* geldt $\sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \sphericalangle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + \sphericalangle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \pi$.

[$\sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $\sphericalangle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ en $\sphericalangle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ hebben dezelfde oriëntatie als driehoek *ABC*.]

Opgave. Bereken $\cos\frac{2}{3}\pi = \cos(2 \cdot \frac{1}{3}\pi)$ en $\sin\frac{2}{3}\pi$. Bereken ook $\cos\frac{3}{4}\pi = \cos(3 \cdot \frac{1}{4}\pi)$ en $\sin\frac{3}{4}\pi$.

3.3 Rotaties.

Er zijn twee lineaire congruenties die het punt E_1 afbeelden op het punt $A \neq E_1$ op de eenheidscirkel. De ene is de spiegeling t.o.v. de middelloodlijn van lijnstuk E_1A [ofwel de bissectrice van $\angle E_1OA$] De andere noemen we de rotatie om *O* over de georienteerde hoek $\sphericalangle E_1OA$. De spiegeling keert de oriëntatie om. Bij een rotatie blijft de oriëntatie behouden. De matrix van de rotatie is $L = [A, A^+]$ met $A^+ = (-a_2, a_1)$, dus

$$L = \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{bmatrix},$$

$\det(L) = 1$ en *L* is oriëntatiebehoudend. De oriëntatie van driehoeken en hoeken blijft behouden onder rotaties. Met $\alpha = \sphericalangle E_1OA$ kunnen we *L* ook schrijven als

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Definitie. Rotatie om O over een georiënteerde hoek. De lineaire congruentie $L = [A, A^+]$ met $|A| = 1$ en $A^+ = (-a_2, a_1)$ noemen we *de rotatie om O over* $\sphericalangle E_1OA$.

Opgave. Ga na dat een punt $B(\cos\beta, \sin\beta)$ door de rotatie $L = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ wordt afgebeeld op het punt $B' = (\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$ en dat $\sphericalangle BOB' = \alpha$.

Dus:

3.3.1 Als een punt $B \neq O$ door de rotatie $L = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ met $\alpha = \sphericalangle E_1OA$ wordt afgebeeld op punt B', dan $\sphericalangle BOB' = \alpha$.

[Ga na dat dit ook nog geldt als punt *B* niet op de eenheidscirkel ligt.]

Toon aan:

3.3.2 Als *A* en *B* op de eenheidscirkel liggen, dan is

$$L = \begin{bmatrix} A \cdot B & -\det(A,B) \\ \det(A,B) & A \cdot B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\sphericalangle AOB & -\sin\sphericalangle AOB \\ \sin\sphericalangle AOB & \cos\sphericalangle AOB \end{bmatrix}$$

de rotatie om *O* over $\sphericalangle AOB$, die *A* op *B* afbeeldt.

Stel $\alpha = \sphericalangle E_1OA$ en $\beta = \sphericalangle E_1OB$. We voeren eerst de rotatie om *O* over α uit en daarna de rotatie om *O* over β. Dat geeft:

$$(\#)\ \begin{bmatrix} b_1 & -b_2 \\ b_2 & b_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 - a_2b_2 & -(a_1b_2 + a_2b_1) \\ a_1b_2 + a_2b_1 & a_1b_1 - a_2b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & -c_2 \\ c_2 & c_1 \end{bmatrix}.$$

We kunnen (#) schrijven als:

$$(\#\#)\quad \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

M.a.w. het resultaat is de rotatie over $\gamma = \alpha + \beta$. Verwisselen van α en β in de matrices geeft hetzelfde resultaat, dus de volgorde waarin we de rotaties over α en β uitvoeren doet er niet toe.

3.3.3 Het resultaat van de rotatie om *O* over hoek α gevolgd door de rotatie om *O* over hoek β is de rotatie om *O* over hoek $\alpha + \beta$. De volgorde, waarin de rotaties worden uitgevoerd, doet er niet toe, dus $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

De rotatie $L = [A, A^+]$ om O over $\alpha = \sphericalangle E_1OA$ beeldt E_1 op A af. De inverse rotatie L^{-1} beeldt A af op E_1 en is de rotatie over $-\alpha = \sphericalangle AOE_1$. Dus

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

$L^{-1} \circ L$ is de identieke transformatie *I*, die we kunnen zien als de rotatie om *O* over $o = \sphericalangle E_1OE_1 = (-\alpha) + \alpha = \alpha + (-\alpha)$. We schrijven $\alpha + (-\beta)$ korter als $\alpha - \beta$.

De rotaties om *O* vormen een transformatiegroep. Ook de identieke transformatie *I* over $o = \sphericalangle AOA$ behoort tot deze groep. De groep is *commutatief*, d.w.z. de volgorde waarin deze transformaties worden uitgevoerd doet er niet toe.

Ga na dat:

$$\cos o = 1,\ \sin o = 0,\ \cos\tfrac{1}{2}\pi = 0,\ \sin\tfrac{1}{2}\pi = 1,\ \cos\pi = -1,\ \sin\pi = 0.$$

$$\cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha \text{ en } \sin(\alpha+\pi) = -\sin\alpha.$$

Uit de formules voor $\cos(\alpha+\beta)$ en $\sin(\alpha+\beta)$ volgt met $\beta = \alpha$:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha \text{ en}$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

[Zoals gebruikelijk schrijven we $\cos^2\alpha$, $\sin^2\alpha$ i.p.v. $(\cos\alpha)^2$, $(\sin\alpha)^2$]

Voor complementaire hoeken α en $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ geldt:

$$\cos(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha) = \sin\alpha \text{ en } \sin(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha) = \cos\alpha .$$

Definitie. Tangens. $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, als $\cos\alpha \neq 0$.

[Als $\cos\alpha = 0$, dan is $\tan\alpha$ niet gedefinieerd, dus $\tan\frac{1}{2}\pi$ is niet gedefinieerd.]

Toon aan:

$\tan o = 0$, $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$, $\tan\alpha = \tan(\alpha + \pi)$ en

$\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$, i.h.b. $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$.

Toon aan:

$\cos\alpha = \cos\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$ of $\alpha = -\beta$,

$\sin\alpha = \sin\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$ of $\alpha = \pi - \beta$,

$\tan\alpha = \tan\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$ of $\alpha = \beta + \pi$.

Toon aan:

Als $A \cdot B \neq 0$, dan $\tan\sphericalangle AOB = \dfrac{\det(A,B)}{A \cdot B}$.

Een rotatie om O is een oriëntatiebehoudende congruentie. Dat geldt ook voor een translatie. Onder beide transformaties wordt een georiënteerde hoek afgebeeld op een gelijke georiënteerde hoek. Om het rotatiebeeld $X' = F(X)$ van een punt X te vinden bij de rotatie om punt M over de georiënteerde hoek $\alpha = \sphericalangle AMB$ gaan we als volgt te werk. Pas eerst de translatie $X \mapsto X - M$ toe die X afbeeldt op $X - M$. Pas op $X - M$ de rotatie L om O toe over $\sphericalangle A'OB'$. Met bovenstaande definitie geldt

$$L = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Pas tenslotte op $L(X - M)$ de translatie $X \mapsto X + M$ toe. Dat geeft

$$X' = F(X) = L(X - M) + M .$$

Definitie. De rotatie F met *centrum* M en *rotatiehoek* $\alpha = \sphericalangle AMB$ is de transformatie

$$F(X) = L(X - M) + M \text{ met } L = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

De rotatie F met *centrum* M en *rotatiehoek* α beeldt cirkels met middelpunt M op zichzelf af. Als $\alpha = o$, dan is F de identieke transformatie. Als $\alpha \neq o$, dan is M het enige dekpunt van F.

Toon aan:

3.3.4 Als de rotatie F met centrum M en rotatiehoek α een punt $X \neq M$ afbeeldt op punt X', dan $\sphericalangle XMX' = \alpha$.

Is F gegeven door $F(X) = L(X) + C$ met $L = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ en $\alpha \neq o$,

dan is het dekpunt M van F eenduidig bepaald door $M - L(M) = C$ ofwel

$$\begin{cases} (1-\cos\alpha)m_1 + (\sin\alpha)m_2 = c_1 \\ (-\sin\alpha)m_1 + (1-\cos\alpha)m_2 = c_2 \end{cases}.$$

De regel van Cramer geeft dan $m_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & \sin\alpha \\ c_2 & 1-\cos\alpha \end{vmatrix}}{2-2\cos\alpha}$ resp. $m_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1-\cos\alpha & c_1 \\ -\sin\alpha & c_2 \end{vmatrix}}{2-2\cos\alpha}$.

We kunnen $F(X) = L(X - M) + M$ schrijven als $F(X) = L(X) + M - L(M)$. L is de rotatie centrum O en rotatiehoek α. Dus:

3.3.5 We kunnen iedere rotatie schrijven als een rotatie met centrum O gevolgd door een translatie.

Opgave. Toon aan dat het product van twee rotaties weer rotatie is of een translatie (mogelijk de identieke transformatie).

Toon aan:

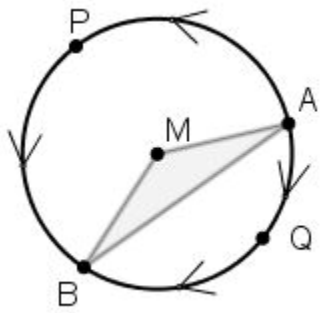
3.3.6 De translaties en de rotaties vormen een transformatiegroep. De rotaties om een vast punt M vormen hiervan een ondergroep. Ook de translaties vormen een ondergroep van deze transformatiegroep. De identieke transformatie I van $\mathbb{R}^2$ is een translatie en ook een rotatie van $\mathbb{R}^2$.

We kunnen $F(X) = L(X - M) + M$ ook schrijven als $F(X) - M = L(X - M)$. Er geldt $F(X) - M = L(X - M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MF(X)} = L(\overrightarrow{MX})$. Hieruit blijkt dat de door de rotatie *F* geïnduceerde transformatie $F(\overrightarrow{MX})$ van de pijlenruimte met beginpunt *M* gegeven wordt door $L(\overrightarrow{MX})$.

Opmerking. In de figuur hieronder heeft driehoek *MAB* en dus ook $\sphericalangle AMB$ een negatieve oriëntatie. Maar dat betekent niet dat de rotatie *F* om punt *M* over hoek $\sphericalangle AMB$ een rotatie om *M* met de wijzers van de klok mee is. Er geldt $F(A) = B$. We kunnen ons hierbij voorstellen dat punt *A* zich hierbij over de cirkel via punt *P* tegen de klok in naar punt *B* beweegt. Maar we kunnen ons ook voorstellen dat *A* zich met de klok mee via punt *Q* over de cirkel naar punt *B* beweegt. Hoe we ons *F* ook voorstellen, het enige dat wiskundig relevant is, is dat *A* bij deze rotatie op *B* terecht komt. Er is precies één rotatie om *M* die *A* op *B* afbeeldt, als $|MA| = |MB|$. Merk verder op dat in

$$\sphericalangle AMB = \sphericalangle AMP + \sphericalangle PMB$$

de hoeken $\sphericalangle AMP$ en $\sphericalangle PMB$ positief georiënteerd zijn, terwijl $\sphericalangle AMB$ negatief georienteerd is. Ook kunnen we $\sphericalangle AMB$ schrijven als de som van de negatief georiënteerde hoeken $\sphericalangle AMQ$ en $\sphericalangle QMB$.



Opmerking. De routes $A \to B \to C \to A$ over de zijden van driehoek *ABC* resp. over de omgeschreven cirkel van driehoek *ABC* gaan beide tegen de klok in precies dan, wanneer driehoek *ABC* positief georiënteerd is.

3.4 Congruente en gelijkvormige driehoeken.

3.4.1 *Congruentiekenmerken voor driehoeken.*

Elk van de volgende vijf voorwaarden is voldoende om te garanderen dat twee driehoeken congruent zijn:

(1) (ZZZ) De corresponderende zijden van beide driehoeken zijn congruent [d.w.z. even lang].

(2) (ZHZ) Een paar zijden en hun ingesloten hoek in de ene driehoek zijn congruent met de corresponderende zijden en hoek in de andere driehoek.

(3) (HZH en ZHH) Een zijde en een paar hoeken in de ene driehoek zijn congruent met de corresponderende zijde en hoeken in de andere driehoek.

(4) (ZZH, onder voorwaarde) Twee zijden en de hoek tegenover de langste van deze zijden in de ene driehoek zijn congruent met de corresponderende zijden en hoek in de andere driehoek.

Bewijs. Voor (1) zie 2.4.5. In de gevallen (2), (3) en (4) kunnen we met de cosinusregel of sinusregel berekenen dat dan ook de andere corresponderende hoeken en/of zijden congruent zijn.

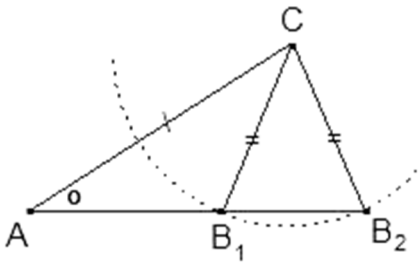
Opmerking bij (4). Speciaal geval van (4) is ZZR, waarin *R* een rechte hoek voorstelt. Dan is de zijde tegenover *R* de hypotenusa en dus de langste zijde van de driehoeken.

Dat de voorwaarde niet gemist kan worden bij ZZH, blijkt uit de figuur hiernaast. Hier

$$AC = AC,\ B_1C = B_2C,$$

terwijl $\angle A = \angle A$, maar AB_1C en AB_2C zijn niet congruent. Dat komt doordat

$$\sin\alpha = \sin(\pi - \alpha).$$



Volgens de sinusregel geldt $\dfrac{\sin\angle AB_1C}{AC} = \dfrac{\sin\angle AB_2C}{AC}$.

Hieruit volgt $\sin\angle AB_1C = \sin\angle AB_2C$. Dat hoeft niet te betekenen $\angle AB_1C = \angle AB_2C$, het kan ook betekenen dat beide hoeken samen gelijk zijn aan π, zoals in de figuur.

Merk op dat we hier volgens de meetkundige traditie de lengte van lijnstuk *AC* simpelweg schrijven als *AC* i.p.v. $|AC|$. Dat zullen we ook in het volgende doen in formules, waar dat geen misverstand kan opleveren. Met $BC = a$ is bedoeld dat de lengte van lijnstuk *BC* gelijk is aan *a*.

Uit 2.4.9 volgt:

3.4.2 De driehoeken PQR en $P'Q'R'$ zijn gelijkvormig precies dan, wanneer er een getal $r > 0$ is zo dat $P'Q' = r \cdot PQ$, $Q'R' = r \cdot QR$ en $P'R' = r \cdot PR$.

3.4.3 De driehoeken PQR en $P'Q'R'$ zijn gelijkvormig precies dan, wanneer twee paar corresponderende hoeken congruent zijn.

Bewijs. De hoeken van een driehoek zijn samen gelijk aan π . Als twee paar corresponderende hoeken congruent zijn, dan is ook het derde paar corresponderende hoeken congruent. Als PQR en $P'Q'R'$ gelijkvormig zijn, dan zijn ook de corresponderende hoeken gelijkvormig en dus congruent. Wat betreft het omgekeerde: Stel de corresponderende hoeken van de driehoeken PQR en $P'Q'R'$ zijn congruent. Uit de sinusregel volgt dat er dan een getal $r > 0$ is zo dat $P'Q' = r \cdot PQ$, $Q'R' = r \cdot QR$ en $P'R' = r \cdot PR$ ofwel de driehoeken PQR en $P'Q'R'$ zijn gelijkvormig .

Uit de cosinusregel volgt

3.4.4 De driehoeken PQR en $P'Q'R'$ zijn gelijkvormig precies dan, wanneer $\angle Q = \angle Q'$ en er is een getal $r > 0$ is zo dat $P'Q' = r \cdot PQ$ en $Q'R' = r \cdot QR$.

3.5 De georiënteerde hoek tussen twee lijnen.

3.5.1 *Definitie*. We noemen $\alpha = \sphericalangle E_1OA$ een *richtingshoek* van lijn *k*, als lijn *OA* evenwijdig is met lijn *k*. Als α_1 en α_2 twee richtingshoeken van lijn *k* zijn, dan $\alpha_1 = \alpha_2$ of $\alpha_1 = \alpha_2 + \pi$. Zijn *k* en *m* lijnen met richtingshoeken α resp. β, dan stellen we $\sphericalangle(k,m) = \beta - \alpha$ en noemen $\sphericalangle(k,m)$ een georiënteerde hoek van het lijnenpaar (k,m). Als $\sphericalangle(k,m) = \alpha$, dan ook $\sphericalangle(k,m) = \alpha + \pi$.

Uit deze definitie volgt onmiddellijk:

$\sphericalangle(k,m) + \pi = \sphericalangle(k,m)$

$\sphericalangle(m,k) = -\sphericalangle(k,m)$,

$\sphericalangle(k,l) + \sphericalangle(l,m) = \sphericalangle(k,m)$.

$k \parallel m \Leftrightarrow \sphericalangle(k,m) = o$,

$\sphericalangle(k,l) = \sphericalangle(m,l) \Leftrightarrow k \parallel m$,

$k \perp m \Leftrightarrow \sphericalangle(k,m) = \frac{1}{2}\pi$.

Opmerking. We kunnen $\sphericalangle(k,l) + \sphericalangle(l,m) = \sphericalangle(k,m)$ ook schrijven als

$\sphericalangle(k,l) + \sphericalangle(l,m) + \sphericalangle(m,k) = \sphericalangle(k,k) = o$ (of π).

3.5.2 Lijn $k: y = px$ snijdt de lijn met vergelijking $x = 1$ in punt $P(1,p)$, dus $\alpha = \sphericalangle E_1OP$ is een richtingshoek van iedere lijn $y = px + r$ met rc $= p$. Er geldt $p = \tan\alpha = \tan(\alpha + \pi)$. Dus de rc van een niet-verticale lijn *k* is de tangens van een richtingshoek van *k*. Is *k* een verticale lijn met vergelijking $x = c$, dan is $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ een richtingshoek van *k* en $\tan\frac{1}{2}\pi$ bestaat niet. We hebben de rc van zo'n lijn gelijk aan ∞ gesteld.

Opgave. De lijnen $y = px + r$ en $y = qx + s$ staan loodrecht op elkaar precies dan, wanneer $pq = -1$. Toon dit aan.

Is α een richtingshoek van lijn *k*, dan $\alpha = \sphericalangle(x\text{-as}, k)$. Het omgekeerde geldt ook.

3.5.3 Als de lijnen $k: y = px + r$ en $m: y = qx + s$ richtingshoeken α resp. β hebben, dan $\tan\alpha = p$, $\tan\beta = q$ en

$$\tan\sphericalangle(k,m) = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta} = \frac{q - p}{1 + p \cdot q}.$$

Opdat $\tan\alpha$, $\tan\beta$ en $\tan\sphericalangle(k,m)$ bestaan, moeten we veronderstellen dat α , β en $\sphericalangle(k,m)$ niet gelijk zijn aan $\frac{1}{2}\pi$. We zagen zonet dat $k \perp m \Leftrightarrow pq = -1$.

De notatie $\sphericalangle(PA,PB)$ wordt gebruikt voor de georiënteerde hoek tussen de lijnen *PA* en *PB*, terwijl $\sphericalangle(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}) = \sphericalangle APB$ de hoek tussen de halve lijnen *PA* en *PB* voorstelt.

Spiegelen t.o.v. een lijn met een gegeven richtingshoek.

Lijn *OA* heeft vergelijking $a_2x - a_1y = 0$. Stel $|A| = 1$, dan is de spiegeling *S* t.o.v. de lijn *OA* de lineaire transformatie met matrix

$$S = \begin{bmatrix} 1-2a_2^2 & 2a_1a_2 \\ 2a_1a_2 & 1-2a_1^2 \end{bmatrix}.$$

Stellen we $\alpha = \sphericalangle E_1OA$, dan $a_1 = \cos\alpha$, $a_2 = \sin\alpha$ en

$$S = \begin{bmatrix} 1-2\sin^2\alpha & 2\cos\alpha\sin\alpha \\ 2\cos\alpha\sin\alpha & 1-2\cos^2\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix}.$$

3.5.4 Als *k* de lijn is door punt *P* met richtingshoek α , dan is

$$F(X) = S(X) + (P - S(P)) \text{ met } S = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix}$$

de spiegeling t.o.v. de lijn *k*.

[*S* is de spiegeling t.o.v. de richtingslijn van lijn *k*.]

Toon aan:

3.5.5 De spiegeling t.o.v. lijn $y = p \cdot x$ is de lineaire transformatie met matrix

$$S = \begin{bmatrix} \dfrac{1-p^2}{1+p^2} & \dfrac{2p}{1+p^2} \\ \dfrac{2p}{1+p^2} & -\dfrac{1-p^2}{1+p^2} \end{bmatrix}.$$

Voorbeeld. De matrix van de spiegeling t.o.v. lijn $y = 2x$ is $\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$.

Opgave. Als $\alpha \neq \frac{1}{2}\pi$, dan $\cos 2\alpha = \dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ en $\sin 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$.

3.5.6 Als F_1 en F_2 de spiegelingen t.o.v. de snijdende lijnen k_1 en k_2 zijn, dan is $F_2 \circ F_1$ de rotatie om het snijpunt P van k_1 en k_2 over $2 \cdot \sphericalangle(k_1, k_2)$.

Bewijs. Stel α en β zijn richtingshoeken van de lijnen k_1 resp. k_2. Neem de richtingslijnen l_1 en l_2 van k_1 resp. k_2. Dan $\sphericalangle(k_1, k_2) = \sphericalangle(l_1, l_2) = \beta - \alpha$. Verder zijn S_1 en S_2 de spiegelingen t.o.v. l_1 resp. l_2. Dan

$$S_2 \circ S_1 = \begin{bmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2(\beta-\alpha) & -\sin 2(\beta-\alpha) \\ \sin 2(\beta-\alpha) & \cos 2(\beta-\alpha) \end{bmatrix}.$$

Hieruit blijkt dat $S_2 \circ S_1$ de rotatie om O over $2 \cdot (\beta - \alpha)$ is. Dan

$$F_1(X) = S_1(X - P) + P \text{ en } F_2(X) = S_2(X - P) + P.$$

Ga na dat

$$F_2(F_1(X)) = S_2(S_1(X - P)) + P.$$

M.a.w. $F_2 \circ F_1$ is de rotatie om P over $2 \cdot \sphericalangle(k_1, k_2)$.

Opmerking. Kiezen we de lijnen k_1 en k_2 zo dat l_1 samenvalt met de x-as, dan heeft l_2 de richtingshoek $\gamma = \beta - \alpha$ en

$$S_2 \circ S_1 = \begin{bmatrix} \cos 2\gamma & \sin 2\gamma \\ \sin 2\gamma & -\cos 2\gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\gamma & -\sin 2\gamma \\ \sin 2\gamma & \cos 2\gamma \end{bmatrix}.$$

Opmerking. Als in 3.5.5 de lijnen k_1 en k_2 loodrecht op elkaar staan, dan is de rotatiehoek gelijk aan π. $F_2 \circ F_1$ dan de *puntspiegeling* t.o.v. het snijpunt P van de lijnen k_1 en k_2. Punt X wordt hierbij afgebeeld op het punt X' zo dat P het midden is van lijnstuk XX'. $F_2 \circ F_1$ is dan de vermenigvuldiging met centrum P en factor -1. [Als we het over een spiegeling van $\mathbb{R}^2$ zonder meer hebben, dan is altijd een spiegeling t.o.v. een lijn bedoeld.]

Toon aan:

3.5.7 Als F_1 en F_2 de spiegelingen t.o.v. de evenwijdige lijnen k_1 en k_2 zijn, dan is $F_2 \circ F_1$ de translatie loodrecht op k en l in de richting van k naar l over tweemaal de afstand van k tot l.

[Voor k_1 kunnen we een lijn door O kiezen. Dan $F_1 = S_1$.]

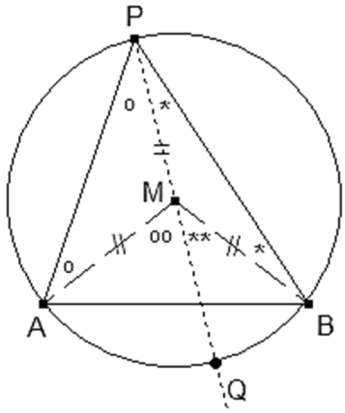
Opgave. Iedere congruentie van $\mathbb{R}^2$ kan tot stand gebracht worden door hooguit 3 spiegelingen. Welke congruenties kunnen we krijgen, wanneer we twee spiegelingen laten volgen door nog een derde spiegeling? Waarom wordt iedere lineaire congruentie tot stand gebracht door hooguit 2 spiegelingen?

3.6 Omtrekshoeken en cirkelbogen.

Definitie. Als de punten *A*, *B* en $P \neq A, B$ op een cirkel liggen met middelpunt *M*, dan noemen we $\sphericalangle APB$ en $\angle APB$ *omtrekshoeken* van deze cirkel. De hoeken $\sphericalangle AMB$ resp. $\angle AMB$ zijn dan de bijbehorende *middelpuntshoeken.*

3.6.1 Als $\sphericalangle APB$ een omtrekshoek is van een cirkel met middelpunt *M* en $\sphericalangle AMB$ is de bijbehorende middelpuntshoek, dan $2 \cdot \sphericalangle APB = \sphericalangle AMB$.

Bewijs. Als $A = B$, dan $2 \cdot \sphericalangle APB = \sphericalangle AMB = o$. Neem verder aan dat $A \neq B$. Zie de figuur. *PQ* is een middellijn van de cirkel. In gelijkbenige driehoek *PMA* hebben de hoeken $\sphericalangle MAP$, $\sphericalangle PMA$ en $\sphericalangle APM$ dezelfde oriëntatie. Ook de hoeken $\sphericalangle APM$ en $\sphericalangle AMQ$ hebben dezelfde oriëntatie. Ga na dat



$$2 \cdot \sphericalangle APM = \sphericalangle AMQ.$$

Op dezelfde manier

$$2 \cdot \sphericalangle MPB = \sphericalangle QMB.$$

Hieruit volgt

$$2 \cdot \sphericalangle APB = 2 \cdot (\sphericalangle APM + \sphericalangle MPB)$$

$$= \sphericalangle AMQ + \sphericalangle QMB = \sphericalangle AMB.$$

Opmerking. Doordat we in dit bewijs werken met georiënteerde hoeken hoeven we niet allerlei speciale gevallen apart te bekijken. Bij het gegeven bewijs maakt het niet uit of punt *M* binnen of buiten driehoek *ABP* ligt. *M* kan ook op één van de zijden van driehoek *ABP* liggen.

3.6.2 Vier verschillende punten *A*, *B*, *C* en *D* liggen op een lijn of op een cirkel precies dan, wanneer $2 \cdot \sphericalangle ACB = 2 \cdot \sphericalangle ADB$.

Bewijs. *C* ligt op lijn *AB* precies dan, wanneer $\sphericalangle ACB = o$ of $\sphericalangle ACB = \pi$ Idem voor punt *D*. Dus *A*, *B*, *C* en *D* liggen op een lijn precies dan, wanneer $2 \cdot \sphericalangle ACB = 2 \cdot \sphericalangle ADB = o$. *ABC* en *ABD* zijn driehoeken precies dan, wanneer $2 \cdot \sphericalangle ACB \neq 0$ en $2 \cdot \sphericalangle ADB \neq 0$. Stel *M* en *N* zijn de middelpunten van de omgeschreven cirkels van de driehoeken *ABC* resp. *ABD*. Dan $2 \cdot \sphericalangle ACB = \sphericalangle AMB$ en $2 \cdot \sphericalangle ADB = \sphericalangle ANB$ De punten *M* en *N* liggen beide op de middelloodlijn van lijnstuk *AB*. Ga na dat $2 \cdot \sphericalangle ACB = 2 \cdot \sphericalangle ADB \Leftrightarrow \sphericalangle AMB = \sphericalangle ANB \Leftrightarrow M = N$. Beide cirkel vallen dus samen precies dan, wanneer $2 \cdot \sphericalangle ACB = 2 \cdot \sphericalangle ADB$.

Opgave. Toon aan dat $2 \cdot \sphericalangle ACB = 2 \cdot \sphericalangle ADB \Leftrightarrow \sphericalangle(CA, CB) = \sphericalangle(DA, DB)$.
[In $\sphericalangle(CA, CB)$ en $\sphericalangle(DA, DB)$ zijn *CA*, *CB* , *DA* en *DB* lijnen en niet halve lijnen.]

Opgave. Toon aan dat $2 \cdot \sphericalangle ACB = 2 \cdot \sphericalangle ADB \Leftrightarrow \tan \sphericalangle ACB = \tan \sphericalangle ADB$.

3.6.3 Stel *A*, *B*, *C* en *D* zijn vier verschillende punten op een cirkel.

(1) Als *C* en *D* aan dezelfde kant van lijn *AB* liggen, dan $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$ en ook $\angle ACB = \angle ACB$.

(2) Als *C* en *D* aan verschillende kanten van lijn *AB* liggen , dan $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB + \pi$ en $\angle ACB + \angle ADB = \pi$.

Bewijs. Stel *A*, *B*, *C* en *D* zijn vier verschillende punten op een cirkel. Dan $2 \cdot \sphericalangle ACB = 2 \cdot \sphericalangle ADB$. Dit is gelijkwaardig met

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB \text{ of } \sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB + \pi .$$

Wat betreft (1): Als $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$, dan hebben beide hoeken dezelfde oriëntatie en liggen *C* en *D* aan dezelfde kant van lijn *AB*. Wat betreft (2): Als $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB + \pi$, dan hebben de hoeken $\sphericalangle ACB$ en $\sphericalangle ADB$ een tegengestelde oriëntatie [want dan $\sin \sphericalangle ACB = -\sin \sphericalangle ADB$] en liggen *C* en *D* aan verschillende kanten van lijn *AB*. We kunnen $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB + \pi$ schrijven als $\sphericalangle ACB + \sphericalangle BDA = \pi$. De hoeken $\sphericalangle ACB$ en $\sphericalangle BDA$ hebben dezelfde oriëntatie, dus uit $\sphericalangle ACB + \sphericalangle BDA = \pi$ volgt $\angle ACB + \angle ADB = \pi$.

Definitie. Zijn *A*, *B* en *P* drie verschillende punten op een cirkel, dan wordt deze cirkel door de punten *A* en *B* in twee *cirkelbogen* verdeeld. Punt *P* ligt op één van deze cirkelbogen. De andere cirkelboog ligt binnen $\angle APB$ en we zeggen dat omtrekshoek $\angle APB$ *op de laatste cirkelboog staat.*

3.6.4 Omtrekshoeken van een cirkel die op dezelfde boog staan, zijn gelijk.
[Het gaat hier over niet-georiënteerde hoeken.]

3.6.5 Als $\angle APB$ een omtrekshoek is van cirkel γ met straal *r*, dan

$$\sin \angle APB = \frac{AB}{2r}.$$

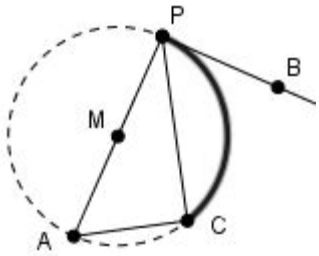
Bewijs. Ga na dat dit in ieder geval klopt als *AB* een middellijn van γ is. Is *AB* niet een middellijn, dan ligt het middelpunt *M* niet op lijn *AB*. Trek middellijn *AM*. Deze snijdt γ in punt *Q* en $\angle AQB = \angle APB$ of $\angle AQB = \pi - \angle APB$. Ga na dat in beide gevallen geldt dat $\sin \angle APB = \sin \angle AQB = AB/(2r)$.

Opgave. Is *r* de straal van de omgeschreven cirkel van driehoek *ABC*, dan is de oppervlakte van driehoek *ABC* gelijk aan $\frac{abc}{4r}$. Toon dit aan.

We breiden het begrip omtrekshoek als volgt uit.

Definitie. Wanneer punt *P* op een cirkel ligt, dan noemen we de hoeken $\sphericalangle APB$ en $\angle APB$ *omtrekshoeken* van de cirkel, wanneer de benen *PA* en *PB* de cirkel snijden of raken.

Voorbeeld. $\angle PAC$ is een omtrekshoek van de cirkel met middelpunt *M*. Volgens de uitgebreide definitie is ook $\angle BPC$ een omtrekshoek van deze cirkel, het been *PB* raakt in *P* aan de cirkel. Beide omtrekshoeken staan op dezelfde cirkelboog *PC*. Er geldt



$$\angle PAC + \angle APC = \tfrac{1}{2}\pi ,$$

want driehoek *APC* is rechthoekig. Ook

$$\angle APC + \angle CPB = \angle APB = \tfrac{1}{2}\pi ,$$

dus de omtrekshoeken $\angle PAC$ en $\angle CPB$ zijn gelijk.

Uit dit voorbeeld blijkt dat voor niet-georiënteerde omtrekshoeken in uitgebreide zin stelling 3.6.4 blijft gelden. Ook blijft bijv. 3.6.1 gelden, wanneer we $\sphericalangle APB$ in het geval $P = A$ als volgt interpreteren. Neem voor de halve lijn *PA* [ofwel *AA*] een halve lijn die in punt *A* raakt aan de cirkel met middelpunt *M*. Idem als $P = B$.

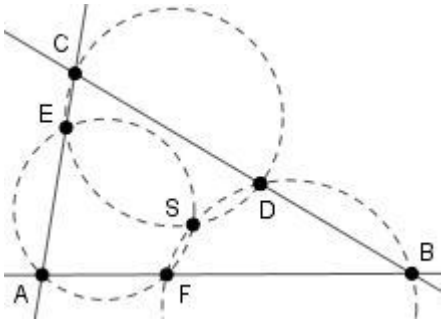
3.6.6 Punt *X* ligt op de omgeschreven cirkel van driehoek *ABC* precies dan, wanneer

$$\sphericalangle(AC, BC) = \sphericalangle(AX, BX) .$$

Hierbij nemen we voor lijn *AX* de raaklijn in *A* aan de omgeschreven cirkel van driehoek *ABC*, als $X = A$. Idem als $X = B$.

Bewijs. Als $X \neq A, B$, dan volgt dit uit 3.6.2 en het resultaat van de opgave na 3.6.2. Bekijk zelf de gevallen $X = A$ en $X = B$.

Toepassing. (*Miquel*) Als de punten *D, E* en *F* op de zijden [opgevat als lijnen] *BC, AC* en *AB* van driehoek *ABC* liggen, dan gaan de omgeschreven cirkels van de driehoeken *AEF, BDF* en *CED* door één punt *S*.



Bewijs: Stel *S* is het tweede snijpunt van de omgeschreven cirkels van *AEF* en *BDF* [mogelijk $S = F$], dan $\sphericalangle(SE, SF) = \sphericalangle(AC, AB)$ en $\sphericalangle(SF, SD) = \sphericalangle(AB, BC)$. Door optellen volgt hieruit $\sphericalangle(SE, SD) = \sphericalangle(AC, BC)$. Dus *S* ligt op de omgeschreven cirkel van *CED*. Bij de juiste interpretatie blijft dit gelden, als bijv. $F = A$ of $F = B$.

3.7 Koordenvierhoeken.

Definitie. Bij een vierhoek *ABCD* die *zichzelf niet doorsnijdt* liggen *A* en *C* aan verschillende kanten van lijn *BD*. Liggen de hoekpunten van zo'n vierhoek op een cirkel, dan noemen we de vierhoek een *koordenvierhoek*.

Uit 3.6.2 en 3.6.3 volgt:

3.7.1 Een vierhoek is een koordenvierhoek precies dan, wanneer de som van een paar overstaande hoeken gelijk aan π is.

Voorbeeld. Iedere rechthoek is een koordenvierhoek. Het snijpunt van de diagonalen is het middelpunt van de omgeschreven cirkel van de rechthoek.

Vierhoek *ABCD* is een koordenvierhoek precies dan, wanneer de vierhoek zichzelf niet doorsnijdt en de omgeschreven cirkel van driehoek *ABC* door punt *D* gaat. Het binnengebied van een koordenvierhoek *ABCD* is convex. De diagonalen *AC* en *BD* snijden elkaar in een punt dat binnen de omgeschreven cirkel van de vierhoek ligt.

3.7.2 *Stelling van Ptolemaeus*. Liggen de hoekpunten van vierhoek *ABCD* op een cirkel, dan

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD .$$

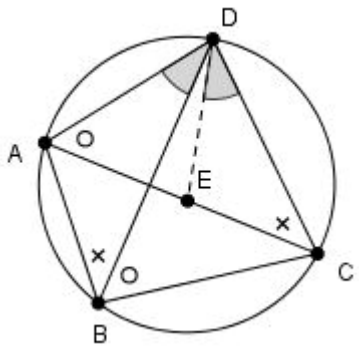
Gelijkheid geldt precies dan, wanneer *ABCD* een koordenvierhoek is.

Bewijs. (*a*) Neem eerst aan dat *ABCD* een koordenvierhoek is. Zie de figuur. Punt *E* op *AC* is zo gekozen dat $\angle ADB = \angle EDC$. [Hier liggen *E* en *C* aan dezelfde kant van lijn *BD*. Als *E* en *A* aan dezelfde kant van lijn *BD* liggen, verwissel dan de letters *A* en *C*. Het is ook mogelijk dat *C* op *BD* ligt.] Ga na dat de hoeken met gelijke tekens gelijk zijn, dus $BDA \approx CDE$ en $ADE \approx BDC$. Uit $BDA \approx CDE$ volgt $AB : BD = CE : CD$. Uit $ADE \approx BDC$ volgt $AE : AD = BC : BD$. Dus

(1) $BD \cdot CE = AB \cdot CD$ en (2) $BD \cdot AE = AD \cdot BC$.

Optellen van (1) en (2) geeft

$$BD \cdot (CE + AE) = AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD .$$



(*b*) Stel nu dat de hoekpunten van vierhoek *ABCD* op een cirkel liggen, maar dat *ABCD* geen koordenvierhoek is. Ga na dat dan *ABDC* wel een koordenvierhoek is, waarin volgens onderdeel (*a*) geldt $AD \cdot BC = AB \cdot CD + AC \cdot BD$. Hieruit volgt voor vierhoek *ABCD* dat

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AB \cdot CD + AB \cdot CD + AC \cdot BD$$

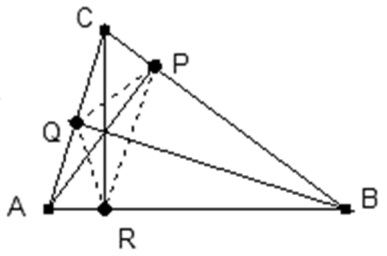
$$= AC \cdot BD + 2 \cdot AB \cdot CD .$$

Dus $AB \cdot CD + BC \cdot AD > AC \cdot BD$.

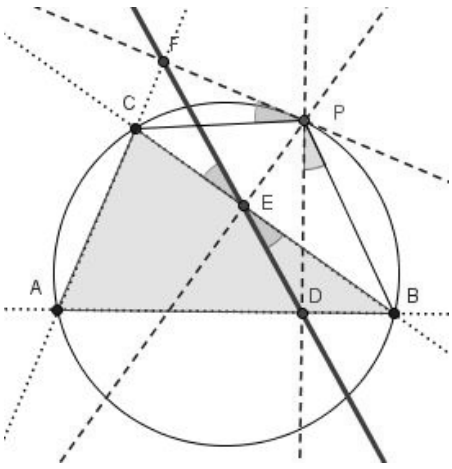
Opmerking. Voor een rechthoek *ABCD* komt 3.7.2 neer op de stelling van Pythagoras.

Opgave. De diagonaal *PR* van een koordenvierhoek *PQRS* heeft de lengte 1 en is een middellijn van de omgeschreven cirkel van de vierhoek. Ga na dat met $\alpha = \angle QPR$ en $\beta = \angle RPS$ geldt $QS = \sin(\alpha + \beta)$ en dat dan 3.7.2 voor vierhoek *PQRS* neerkomt op $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$.

De hoogtelijnen in een driehoek zijn de bissectrices van de voetpuntsdriehoek.



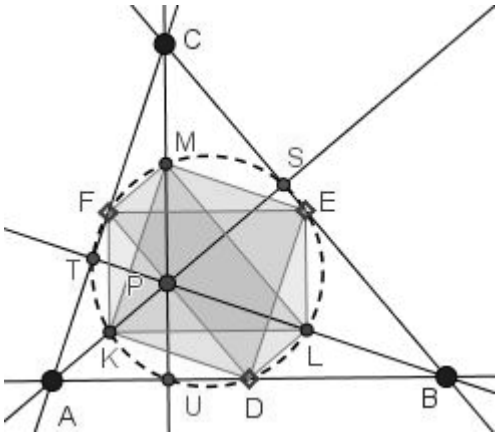
Bewijs. Stel *P*, *Q* en *R* zijn de *voetpunten* van de hoogtelijnen uit *A*, *B* resp. *C* van driehoek *ABC*. *PQR* is de *voetpuntsdriehoek* van driehoek *ABC*. De punten *P* en *Q* liggen op de cirkel met middellijn *AB*, want $\angle APB = \angle AQB = \frac{1}{2}\pi$. *ABPQ* is een koordenvierhoek waarin $\angle A + \angle P = \pi$ en dus $\angle QPC = \angle A$. Om soortgelijke reden geldt ook $\angle RPB = \angle A$. Verder $AP \perp BC$. Hieruit volgt dat *AP* bissectrice is van $\angle QPR$. Idem voor de andere hoogtelijnen. [Hoe moet dit bewijs aangepast worden, als $\angle C$ een stompe hoek is?]



Lijn van Wallace. *P* is een punt op de omgeschreven cirkel van driehoek *ABC*. *D*, *E* en *F* zijn de [loodrechte] projecties van *P* op de zijden van driehoek *ABC*. We gaan na dat de punten *D*, *E* en *F* op één lijn liggen. Deze lijn heet de *lijn van Wallace* bij punt *P*.

Bewijs. Als *P* samenvalt met een van de hoekpunten van driehoek *ABC*, dan is de stelling op triviale wijze juist. Als $P \neq A, B, C$, dan liggen *D*, *E* en *F* liggen op één lijn, wanneer $\angle CEF = \angle BED$. Vierhoek *CEPF* is een koordenvierhoek [de punten *F* en *E* liggen op de cirkel met middellijn *CP* volgens de stelling van Thales]. De omtrekshoeken $\angle CEF$ en $\angle CPF$ van de omgeschreven cirkel van vierhoek *CEPF* staan op dezelfde boog van deze cirkel, dus $\angle CEF = \angle CPF$. Vierhoek *BDEP* is een koordenvierhoek [de punten *D* en *E* liggen op de cirkel met middellijn *PB*], de hoeken $\angle DEB$ en $\angle DPB$ staan op dezelfde boog van de omgeschreven cirkel van *BDEP*, dus $\angle DEB = \angle DPB$. Ook *ADPF* is een koordenvierhoek [van de cirkel met middellijn *AP*], dus $\angle A + \angle CPD + \angle CPF = \pi$. *P* ligt op de omgeschreven cirkel van driehoek *ABC* en dus ook $\angle A + \angle CPD + \angle DPB = \pi$. Hieruit volgt $\angle CPF = \angle DPB$ ofwel *D*, *E* en *F* liggen op één lijn.

De negenpuntscirkel van een driehoek. De drie hoogtelijnen van een driehoek *ABC* gaan door één punt *P*. De punten *D*, *E*, *F* en *K*, *L*, *M* zijn de middens van de lijnstukken *AB*, *BC*, *CA* en *AP*, *BP*, *CP*. Verder zijn *S*, *T* en *U* de voetpunten van de hoogtelijnen uit *A*, *B* resp. *C*. We weten dat een driehoek precies één omgeschreven cirkel heeft. Het middelpunt van de omgeschreven cirkel van een rechthoekige driehoek valt samen met het midden van de hypotenusa. Toon aan dat de punten *D*, *E*, *F*, *K*, *L*, *M* op een cirkel liggen, die ook door *S*, *T* en *U* gaat. De cirkel door deze negen punten heet de *negenpuntscirkel van driehoek ABC.* Zie de volgende figuur:



3.8 De macht van een punt t.o.v. een cirkel.

De vergelijking van een cirkel γ met middelpunt *M* en straal *r* kunnen we schrijven als $XM^2 = r^2$ ofwel $XM^2 - r^2 = 0$. Als *P* een punt in $\mathbb{R}^2$ is, dan wordt het getal $PM^2 - r^2$ de *macht van P t.o.v. cirkel* γ genoemd. We gaan de meetkundige betekenis van $PM^2 - r^2$ na. Het is duidelijk dat de macht van punt *P* t.o.v. cirkel γ positief, 0 resp. negatief is, als *P* buiten, op resp. binnen cirkel γ ligt.

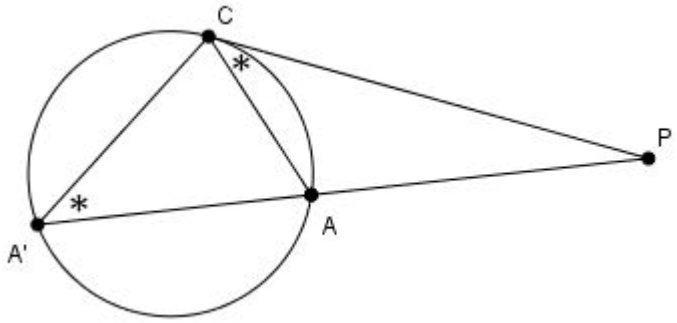
3.8.1 Stel *A* en *B* zijn punten op cirkel γ met middelpunt *M* en straal *r* en *P* is een punt dat niet op γ ligt. De lijnen *PA* en *PB* snijden γ ook nog in A' resp. B'. Dan geldt $PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$. Dit geldt ook nog als $A' = A$ of $B' = B$.

Bewijs. (1) Neem eerst *P* buiten de cirkel. Lijn *PA* snijdt de cirkel ook nog in A'. Lijn *PC* raakt de cirkel in *C*. Zie de volgende figuur. Ga na dat $PAC \approx PCA'$ en dus

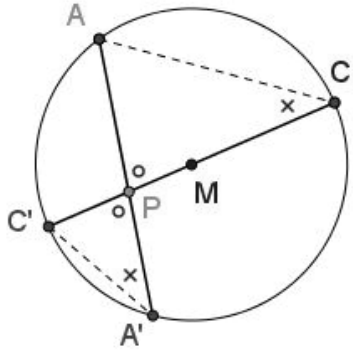
$$PA : PC = PC : PA' \text{ ofwel } PA \cdot PA' = PC^2 .$$

Dit geldt ook nog, als $A = A'$, m.a.w. als lijn *PA* in punt *A* aan de cirkel raakt. Is *B* nog een punt op de cirkel en snijdt lijn *PB* de cirkel ook nog in B', dan

$$PA \cdot PA' = PB \cdot PB' = PC^2 .$$



(2) In de volgende figuur ligt *P* binnen de cirkel. *PM* is een middellijn van de cirkel die de cirkel snijdt in *C* en C'.



Dan $PCA \approx PA'C'$ en dus $PA : PC' = PC : PA'$ ofwel

$$PA \cdot PA' = PC \cdot PC'$$

Is *B* nog een punt op de cirkel en snijdt lijn *PB* de cirkel ook nog in B', dan

$$PA \cdot PA' = PB \cdot PB' = PC \cdot PC'.$$

3.8.2 Stel γ is een cirkel met middelpunt *M* en straal *r*. Een lijn door *P* snijdt γ in de punten *A* en A'.

(1) Als *P* buiten de cirkel ligt, dan hebben $\overrightarrow{PA}$ en $\overrightarrow{PA'}$ dezelfde richting en $PA \cdot PA' = PM^2 - r^2$.

(2) Ligt het punt *P* binnen cirkel γ, dan hebben $\overrightarrow{PA}$ en $\overrightarrow{PA'}$ tegengestelde richting en $PA \cdot PA' = r^2 - PM^2$.

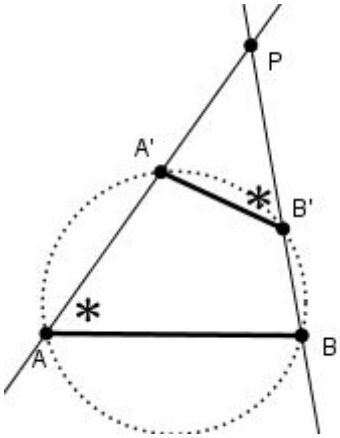
Bewijs. Zie de figuren in het bewijs van 3.8.1.
In geval (1) geldt $PA \cdot PA' = PC^2 = PM^2 - r^2$.
In geval (2) geldt $PA \cdot PA' = PC \cdot PC' = (r + PM)(r - PM) = r^2 - PM^2$.

Twee cirkels met hetzelfde middelpunt noemen we *concentrisch*. Toon aan:

3.8.3 Bij twee niet-concentrische cirkels vormen de punten *X* die dezelfde macht t.o.v. beide cirkels hebben, een rechte lijn *k* die loodrecht staat op lijn die de middelpunten van beide cirkels verbindt. Lijn *k* heet de *machtlijn* van deze cirkels. Snijden beide cirkels elkaar in de punten *A* en *B*, dan gaat de machtlijn *k* door *A* en *B* [mogelijk $A = B$].

[Schrijf $XM^2 - r_1^2 = XN^2 - r_2^2$ in de vorm $px + qy = c$. Zie ook de opgave na 2.2.2.]

Opgave. In de figuur hiernaast hebben $\overrightarrow{PA}$ en $\overrightarrow{PA'}$ dezelfde richting. Hetzelfde geldt voor $\overrightarrow{PB}$ en $\overrightarrow{PB'}$. Verder $PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$. Toon aan dat de punten *A*, *B*, A' en B' op een cirkel liggen. Als $A = A'$ en $B \neq B'$, dan raakt deze cirkel in *A* aan de lijn *PA*. Idem als $B = B'$ en $A \neq A'$. Als $A' = A$ en ook $B = B'$, dan is er precies één cirkel, die in *A* en *B* aan de lijnen *PA* en *PB* raakt. Toon ook aan dat de raaklijn in *P* aan de omgeschreven cirkel van driehoek *ABP* evenwijdig is met $A'B'$. Evenzo is de raaklijn in *P* aan de omgeschreven cirkel van driehoek $A'B'P$ evenwijdig met *AB*.



3.9 Inversie t.o.v. een cirkel.

……

Deze paragraaf is hier niet opgenomen.

……

De hoofdstukken 4, 5 en 6 ontbreken in deze korte versie.

7 Meetkunde in $\mathbb{R}^3$

We gaan uit van een driedimensionale ruimte, waarin ieder punt voorzien is van een uniek coördinatendrietal (x,y,z) met $x,y,z \in \mathbb{R}$. Na het invoeren van coördinaten identificeren we de ruimte met de verzameling $\mathbb{R}^3$ en noemen we de elementen van $\mathbb{R}^3$ *punten*. De eerste, tweede en derde coördinaat van een punt wordt de x-*coördinaat*, y-*coördinaat* resp. z-*coördinaat* van dat punt genoemd. De *x-as* is de lijn waarop de punten $(x,0,0)$ liggen. Op de *y-as* liggen de punten $(0,y,0)$ en op de *z-as* de punten $(0,0,z)$. De x-as, y-as en z-as heten de *coördinaatassen*. Het *coördinaatvlak* door de x-as en y-as heet het *xy-vlak* en stellen we ons voor als een horizontaal vlak. De coördinaatvlakken door de x-as en z-as resp. door de y-as en z-as noemen we het *xz-vlak* resp. *yz-vlak*.

7.1 Lineaire afbeeldingen en determinanten.

De punten van $\mathbb{R}^3$ duiden we aan met hoofdletters en het is vaak handig om de bijbehorende coördinaten aan te duiden met de corresponderende kleine letters voorzien van indices 1, 2 en 3. Dat geeft notaties als $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$, …, $X(x_1,x_2,x_3)$, etc. De *lineaire bewerkingen* van $\mathbb{R}^3$ zijn de *coördinaatsgewijze optelling*:

$$X+Y=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ x_3+y_3)$$

en het *scalair product* $tX=(tx_1,tx_2,tx_3)$ van een getal $t \in \mathbb{R}$ en een punt *X*. We schrijven $-1X$ als $-X$ en $X+(-Y)$ als $X-Y$. Met deze lineaire bewerkingen is $\mathbb{R}^3$ een *driedimensionale lineaire ruimte*. De *standaardbasis* van $\mathbb{R}^3$ is (E_1,E_2,E_3) met $E_1(1,0,0)$, $E_2(0,1,0)$ en $E_3(0,0,1)$. $O(0,0,0)$ is de *oorsprong* van $\mathbb{R}^3$

Definitie. Een *lineaire afbeelding L* van $\mathbb{R}^3$ naar zichzelf wordt gegeven door

$$L(X)=x_1A+x_2B+x_3C \text{ met } A, B \text{ en } C \text{ uit } \mathbb{R}^3.$$

Ga na dat $A=L(E_1)$, $B=L(E_2)$ en $C=L(E_3)$. We noteren *L* ook als $L=[A,B,C]$ of met een 3×3-matrix als

$$L=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}.$$

In de eerste kolom van de matrix staan de coördinaten van *A* onder elkaar, in de tweede kolom de coördinaten van *B* en in de derde kolom de coördinaten van *C*. Verder geldt

$$L(X+Y)=L(X)+L(Y) \text{ en } L(tX)=tL(X),$$

d.w.z. *L* respecteert de lineaire bewerkingen. I.h.b. geldt $L(O)=O$.

Zijn $L=[A,B,C]$ en $M=[P,Q,R]$ lineaire afbeeldingen van $\mathbb{R}^3$, dan wordt de samenstelling $M\circ L$ gedefinieerd door

$$(M\circ L)(X)=M(L(X)).$$

Eerst wordt L uitgevoerd, daarna M. Ga na dat

$$M\circ L=[M(A),M(B),M(C)]$$

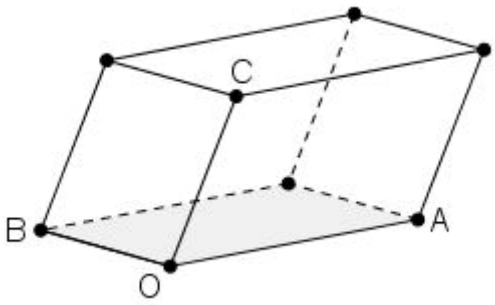
$$=[a_1P+a_2Q+a_3R,b_1P+b_2Q+b_3R,c_1P+c_2Q+c_3R].$$

Merk op dat i.h.a. $M\circ L\neq L\circ M$. Ook $M\circ L$ en $L\circ M$ zijn weer lineaire afbeeldingen [van $\mathbb{R}^3$, maar dat zeggen we er niet altijd bij.]

De *determinant* van $L=[A,B,C]$ wordt genoteerd als $\det(L)$ en ook als

$$\det(A,B,C) \text{ of als } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

met de coördinaten van A, B en C tussen verticale strepen. De waarde van deze determinant wordt meetkundig geïnterpreteerd als de *georiënteerde inhoud* van het *blok* ['*parallellepipedum*'] hieronder, dat *opgespannen* wordt door vectoren $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ en $\overrightarrow{OC}$. [De zijvlakken zijn parallellogrammen. Het grondvlak is het parallellogram met hoekpunten O, A, B en $A+B$. Het bovenvlak heeft C, $A+C$, $B+C$ en $A+B+C$ als hoekpunten.]



De waarde van $\det(A,B,C)$ is eenduidig bepaald door de eigenschappen

(1) $\det(A+A',B,C)=\det(A,B,C)+\det(A',B,C)$,

(2) $\det(t\cdot A,B,C)=t\cdot\det(A,B,C)$,

(3) bij verwisselen van twee van de punten A, B en C gaat de determinant $\det(A,B,C)$ over in zijn tegengestelde,

(4) $\det(E_1,E_2,E_3)=1$.

Uit (3) volgt:

(5) $\det(A,B,C)=0$, als twee van de punten A, B en C gelijk zijn.

Zo gaat bijv. $\det(A,A,C)$ na verwisselen van de beide A's over in $-\det(A,A,C)$. Dat betekent dat $\det(A,A,C)=-\det(A,A,C)$ ofwel $2\cdot\det(A,A,C)=0$ en dus $\det(A,A,C)=0$.

De eigenschappen (1) en (2) houden in dat de afbeelding $\varphi_1(X)=(X,B,C)$ bij vaste B en C een lineaire afbeelding van $\mathbb{R}^3$ naar $\mathbb{R}$ is. Met behulp van (3) volgt hieruit dat dit ook geldt voor de afbeeldingen $\varphi_2(X)=(A,X,C)$ en $\varphi_3(X)=(A,B,X)$. Als we

$$\det(A,B,C)=\det(a_1E_1+a_2E_2+a_3E_3,b_1E_1+b_2E_2+b_3E_3,c_1E_1+c_2E_2+c_3E_3)$$

uitwerken met behulp van bovengenoemde rekenregels, dan vinden we:

7.1.1 $\det(A,B,C)=a_1b_2c_3-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1$.

Merk op dat de indices van $a_i\,b_j\,c_k$ alle drie verschillend zijn en dat voor de term $a_i\,b_j\,c_k$ een min staat precies dan, wanneer (i,j,k) uit $(1,2,3)$ ontstaat door een verwisseling van 2 getallen [één van de getallen is op zijn plaats gebleven].

Opgave. Toon aan dat

$$\det(A,B,C)=c_1\cdot\begin{vmatrix}a_2&b_2\\a_3&b_3\end{vmatrix}-c_2\cdot\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_3&b_3\end{vmatrix}+c_3\cdot\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}$$

en ook

$$\det(A,B,C)=a_1\cdot\begin{vmatrix}b_2&c_2\\b_3&c_3\end{vmatrix}-a_2\cdot\begin{vmatrix}b_1&c_1\\b_3&c_3\end{vmatrix}+a_3\cdot\begin{vmatrix}b_1&c_1\\b_2&c_2\end{vmatrix}.$$

Definitie. Als

$$L=\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{bmatrix}\text{ en }M=\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix},$$

dan noemen we de lineaire afbeeldingen L en M en ook hun matrices elkaars *getransponeerde*. Notatie $M=L^{\mathrm{T}}$ en $L=M^{\mathrm{T}}$. De kolommen van een matrix zijn de rijen van zijn getransponeerde en omgekeerd.

Opgave. Toon aan dat

$$\det(L^{\mathrm{T}})=\det(L)\text{ ofwel }\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}.$$

Opgave. Toon aan dat $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3$.

7.1.2 Zijn $L = [A, B, C]$ en $M = [P, Q, R]$ lineaire afbeeldingen, dan

$$\det(M \circ L) = \det(M) \cdot \det(L) .$$

Bewijs.

$$\det(M \circ L) = \det(M(A), M(B), M(C))$$

$$= \det(a_1 P + a_2 Q + a_3 R, b_1 P + b_2 Q + b_3 R, c_1 P + c_2 Q + c_3 R) .$$

Toon met bovengenoemde rekenregels aan dat hieruit volgt:

$$\det(M \circ L) = (a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1) \cdot \det(P, Q, R) .$$

Dus $\det(M \circ L) = \det(M) \cdot \det(L)$.

Een belangrijke eigenschap van de determinant wordt gegeven door:

7.1.3 Bij ieder punt Y in $\mathbb{R}^3$ zijn er uniek bepaalde getallen x_1, x_2 en x_3 zo dat $Y = x_1 A + x_2 B + x_3 C$ precies dan, wanneer $\det(A, B, C) \neq 0$,

Bewijs.

$$Y = x_1 A + x_2 B + x_3 C \;\Leftrightarrow\; (\#) \begin{cases} a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 = y_1 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = y_2 \\ a_3 x_1 + b_3 x_2 + c_3 x_3 = y_3 \end{cases} .$$

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ heet hier de *coëfficiëntendeterminant* van het stelsel (#).

We nemen aan dat de lezer bekend is met de oplossingsmethode ["*Gauss-eliminatie*"] waarbij het stelsel (#) wordt herleid tot een gelijkwaardig stelsel (##) in 'trapvorm'

$$(\#\#) \begin{cases} \tilde{a}_1 x_1 + \tilde{b}_1 x_2 + \tilde{c}_1 x_3 = \tilde{y}_1 \\ \qquad\quad \tilde{b}_2 x_2 + \tilde{c}_2 x_3 = \tilde{y}_2 \\ \qquad\qquad\quad \tilde{c}_3 x_3 = \tilde{y}_3 \end{cases}$$

Door deze herleiding is $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3)$ reeds expliciet bepaald. Uit de toepaste bewerkingen bij de herleiding blijkt dat de coëfficiëntendeterminanten van de stelsels (#) en (##) beide $\neq 0$ zijn of beide gelijk zijn aan 0. De coëfficiëntendeterminant van (##) is gelijk aan $\tilde{a}_1 \tilde{b}_2 \tilde{c}_3$ [zie de laatste opgave]. Als $\tilde{a}_1 \tilde{b}_2 \tilde{c}_3 \neq 0$, dan is de uniek bepaalde oplossing (x_1, x_2, x_3) gauw gevonden.

Als $\tilde{a}_1\tilde{b}_2\tilde{c}_3 = 0$ [en dus ook $\det(A,B,C) = 0$], dan ligt de zaak wat ingewikkelder. Dan is minstens één van $\tilde{a}_1, \tilde{b}_2$ en $\tilde{c}_3$ gelijk aan 0. We moeten dan een aantal verschillende mogelijkheden apart onderzoeken, afhankelijk van de vraag welke coëfficiënten in (##) wel of niet gelijk aan 0 zijn. Dat laten we aan de lezer over.

Uit 7.1.3 volgt voor de lineaire afbeelding $L = [A,B,C]$ dat er bij iedere Y een uniek punt X bestaat zo dat $Y = L(X)$ precies dan, wanneer $\det(L) \neq 0$. Dat houdt in dat L omkeerbaar is, als $\det(L) \neq 0$. De inverse afbeelding M wordt gedefinieerd door $M(Y) = X \Leftrightarrow L(X) = Y$. Is M de inverse van L, dan noteren we M als L^{-1}.

7.1.4 De lineaire afbeelding $L = [A,B,C]$ is omkeerbaar precies dan, wanneer $\det(A,B,C) \neq 0$. De inverse afbeelding L^{-1} is dan ook weer een lineaire afbeelding.

Een omkeerbare afbeelding van $\mathbb{R}^3$ op zichzelf noemen we een *transformatie* van $\mathbb{R}^3$. Dus een lineaire afbeelding L van $\mathbb{R}^3$ is een lineaire transformatie van $\mathbb{R}^3$ precies dan, wanneer $\det(L) \neq 0$. Uit 7.1.1 volgt dat het achter elkaar uitvoeren van lineaire transformaties weer een lineaire transformatie oplevert. De lineaire transformaties van $\mathbb{R}^3$ vormen een *transformatiegroep*, d.w.z. is L een lineaire transformatie, dan is ook zijn inverse L^{-1} een lineaire transformatie. $L^{-1}(L(X)) = X$ voor iedere $X \in \mathbb{R}^3$. Dus $L^{-1} \circ L = I$, waarin I de *identieke transformatie* van $\mathbb{R}^3$ is. $I(X) = X$ voor ieder punt X. Ga na dat $I = [E_1, E_2, E_3]$. I dus een lineaire transformatie. De matrix van I is

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ en } \det(I) = 1.$$

Uit 7.1.1 volgt

$$\det(L^{-1} \circ L) = \det(L^{-1}) \cdot \det(L) = \det(I) = 1, \text{ dus } \det(L^{-1}) = 1/\det(L).$$

Zijn F en G twee afbeeldingen van $\mathbb{R}^3$ naar zichzelf, dan is $G \circ F$ de afbeelding die gedefinieerd wordt door $(G \circ F)(X) = G(F(X))$ voor iedere $X \in \mathbb{R}^3$. In $G(F(X))$ wordt eerst F uitgevoerd en daarna G. I.h.a. zijn $G \circ F$ en $G \circ F$ niet dezelfde afbeelding. Wel geldt $(H \circ G) \circ F = H \circ (G \circ F)$, want

$$((H \circ G) \circ F)(X) = (H \circ (G \circ F))(X) = H(G(F(X))).$$

Definitie. Een verzameling $\mathcal{G}$ van transformaties van $\mathbb{R}^3$ is een *transformatiegroep* van $\mathbb{R}^3$, als met F en G ook $G \circ F$ en F^{-1} tot $\mathcal{G}$ behoren. We veronderstellen hierbij dat $\mathcal{G}$ niet leeg is.

Stel $Y = L(X)$ met $L = [A,B,C]$ en $\det(L) \neq 0$. Dan $X = L^{-1}(Y)$ en we kunnen L^{-1} bepalen met behulp van de volgende stelling [vergelijk 1.1.4]:

7.1.5 *Regel van Kramer.* Als $\det(A,B,C) \neq 0$, dan $Y = x_1A + x_2B + x_3C$ precies dan, wanneer

$$x_1 = \frac{\det(Y,B,C)}{\det(A,B,C)},\ x_2 = \frac{\det(A,Y,C)}{\det(A,B,C)},\ x_2 = \frac{\det(A,B,Y)}{\det(A,B,C)}$$

ofwel

$$X = L^{-1}(Y) = \left(\frac{\det(Y,B,C)}{\det(A,B,C)}, \frac{\det(A,Y,C)}{\det(A,B,C)}, \frac{\det(A,B,Y)}{\det(A,B,C)}\right).$$

De matrix van L^{-1} is dan $L^{-1} = [L^{-1}(E_1), L^{-1}(E_2), L^{-1}(E_2)]$

Bewijs. Stel $\det(A,B,C) \neq 0$ en $Y = x_1A + x_2B + x_3C$.
Dan $\det(Y,B,C) = x_1 \cdot \det(A,B,C)$, $\det(A,Y,C) = x_2 \cdot \det(A,B,C)$ en $\det(A,B,Y) = x_3 \cdot \det(A,B,C)$.

Opgave. Toon aan dat $\det(A,B,C) = \det(B,C,A) = \det(C,A,B)$ en dat $\det(B,A,C) = \det(A,C,B) = \det(C,B,A) = -\det(A,B,C)$.

Nog meer lineaire afbeeldingen. Naast lineaire afbeeldingen van $\mathbb{R}^3$ naar $\mathbb{R}^3$ zijn er ook lineaire afbeeldingen van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}^3$. Is L zo'n afbeelding, dan noemen we L een lineaire $\mathbb{R}^2$-$\mathbb{R}^3$-afbeelding. L beeldt X in $\mathbb{R}^2$ af op Y in $\mathbb{R}^3$ en wel zo dat

$$L(t \cdot X) = t \cdot L(X) \text{ en } L(X_1 + X_2) = L(X_1) + L(X_2)$$

en dus

$$L(X) = L(x_1E_1 + x_2E_2) = x_1L(E_1) + x_2L(E_2).$$

Definitie. Een lineaire $\mathbb{R}^2$-$\mathbb{R}^3$-afbeelding wordt voor $X \in \mathbb{R}^2$ gegeven door

$$L(X) = x_1P + x_2Q \text{ met } P,Q \in \mathbb{R}^3.$$

Ga na dat $P = L(E_1)$, $Q = L(E_2)$. We noteren L als $L = [P,Q]$, waarbij we wel moeten bedenken dat $P,Q \in \mathbb{R}^3$, dus de bijbehorende matrix heeft de vorm

$$L = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \\ p_3 & q_3 \end{bmatrix}.$$

Dit is een 3×2-matrix [aantal horizontale rijen = 3, aantal verticale kolommen =2]. Bij $X(t,u)$ in $\mathbb{R}^2$ vinden we $L(X) = tP + uQ$.

Een determinant is voor een lineaire $\mathbb{R}^2$-$\mathbb{R}^3$-afbeelding $L=[P,Q]$ en de bijbehorende niet-vierkante matrix niet gedefinieerd. Wel kunnen we zeggen dat L een 1-1-correspondentie is tussen $\mathbb{R}^2$ en zijn *beeldruimte*

$$L(\mathbb{R}^2)=\{Y\in\mathbb{R}^3 \mid Y=L(X) \text{ en } X\in\mathbb{R}^2\},$$

wanneer de lijnen OP en OQ niet samenvallen. L is dan een lineaire transformatie van $\mathbb{R}^2$ naar de beeldruimte $L(\mathbb{R}^2)$. De *dimensie* van deze beeldruimte is gelijk aan de dimensie van $\mathbb{R}^2$, namelijk 2, en $L(\mathbb{R}^2)$ is een *vlak* door O in $\mathbb{R}^3$. Bij een lineaire afbeelding L geldt altijd $L(O)=O$. [We gebruiken de letter O zowel voor de oorsprong $(0,0)$ van $\mathbb{R}^2$ als voor de oorsprong $(0,0,0)$ van $\mathbb{R}^3$.] Wanneer de lijnen OP en OQ niet samenvallen, dan noemen we P en Q *lineair onafhankelijk* en kunnen we ieder punt Y in de beeldruimte van $L=[P,Q]$ op precies één manier schrijven als $Y=tP+uQ$. [Stel hiertoe $Y=tP+uQ=t'P+u'Q$ ofwel $(t-t')P=(u'-u)Q$. Ga na dat hieruit volgt dat $t'=t$ en $u'=u$.] L is dan omkeerbaar: bij iedere Y in $L(\mathbb{R}^2)$ is er precies één X in $\mathbb{R}^2$ zo dat $Y=L(X)$. Zijn P en Q daarentegen lineair afhankelijk en bijv. $P\neq O$, dan $Q=tP$, dus punt Q ligt op lijn OP. In dat geval bestaat de beeldruimte van L uit de punten van lijn OP en heeft dimensie 1. Idem als $Q\neq O$. Het is ook mogelijk dat $P=Q=O$. De beeldruimte van L bevat dan alleen de oorsprong O en heeft dimensie 0. De dimensie van de beeldruimte van L wordt ook de *rang* van L, notatie $\text{rang}(L)$, en van zijn matrix genoemd. Bij een lineaire $\mathbb{R}^2$-$\mathbb{R}^3$-afbeelding L geldt dus $\text{rang}(L)$ is gelijk aan 0, 1 of 2. Als $\text{rang}(L)=2$, dan is de beeldruimte $L(\mathbb{R}^2)$ een vlak door O. Als $\text{rang}(L)=1$, dan is de beeldruimte $L(\mathbb{R}^2)$ een lijn door O. Als $\text{rang}(L)=0$, dan $L(\mathbb{R}^2)=\{O\}$.

Definitie. Een deelverzameling V van $\mathbb{R}^3$ of $\mathbb{R}^2$ heet een *lineaire deelruimte* van $\mathbb{R}^3$ resp. $\mathbb{R}^2$, wanneer $O\in V$ en voor iedere $X,Y\in V$ en $t\in\mathbb{R}$ geldt dat ook $X+Y\in V$ en $t\cdot X\in V$. V is dan *gesloten* m.b.t. de lineaire bewerkingen van $\mathbb{R}^3$.

De lineaire deelruimten van $\mathbb{R}^3$ zijn de vlakken en de lijnen die door O gaan. Daarnaast zijn ook $\{O\}$ en $\mathbb{R}^3$ zelf lineaire deelruimten van $\mathbb{R}^3$. De lineaire deelruimten van $\mathbb{R}^2$ zijn de lijnen door O en daarnaast ook weer $\{O\}$ en $\mathbb{R}^2$ zelf. De dimensie van $\{O\}$ is 0, de dimensie van een lijn is 1 en de dimensie van een vlak is 2. $\mathbb{R}^2$ is een vlak en heeft dimensie 2. De ruimte $\mathbb{R}^3$ heeft dimensie 3.

$\mathbb{R}$ is een 1-dimensionale lineaire ruimte.

Definitie. Een lineaire $\mathbb{R}$-$\mathbb{R}^3$-afbeelding L wordt voor $x\in\mathbb{R}$ gegeven door

$$L(x)=xP \text{ met } P\in\mathbb{R}^3.$$

Als $P \neq O$, dan is L een 1-1-afbeelding van $\mathbb{R}$ op de lijn OP in $\mathbb{R}^3$. De matrix van L is de 3×1-*kolommatrix*

$$L = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}.$$

Definieer zelf nog wat we moeten verstaan onder lineaire $\mathbb{R}$-$\mathbb{R}^2$-afbeelding of een lineaire $\mathbb{R}$-$\mathbb{R}$ afbeelding en ga na hoe de matrices van deze afbeeldingen eruit zien.

Definitie. Als V en W twee verzamelingen zijn en φ is een afbeelding van V naar W, dan is er bij iedere $X \in V$ een $Y \in W$ zo dat $Y = \varphi(X)$. Als er bij iedere $Y \in W$ precies één $X \in V$ is zo dat $Y = \varphi(X)$, dan noemen we φ een *transformatie* van V naar W. Zo'n transformatie wordt ook wel een 1-1- *correspondentie* tussen V en W genoemd. Als $V = W$, dan is φ een *transformatie* van V.

Ieder vlak door O in $\mathbb{R}^3$ is de beeldruimte van een lineaire $\mathbb{R}^2$-$\mathbb{R}^3$-transformatie Als de vlakken V_1 en V_2 de beeldruimten zijn van de lineaire $\mathbb{R}^2$-$\mathbb{R}^3$-transformaties L_1 resp. L_2, dan is $L = L_2 \circ L_1^{-1}$ een lineaire 1-1-correspondentie tussen de vlakken V_1 en V_2. Soortgelijk bij twee lijnen door O in $\mathbb{R}^3$.

7.2 Translaties, pijlen en affiene afbeeldingen.

Definitie. Een *translatie* F van $\mathbb{R}^3$ is een transformatie van $\mathbb{R}^3$, die wordt gegeven door $F(X) = X + T$.

7.2.1 Bij twee punten A en B is er precies één translatie F van $\mathbb{R}^3$ die A afbeeldt op B en dat is de translatie $F(X) = X + (B - A)$. We noteren deze translatie als $\overrightarrow{AB}$.

Ga na dat $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow B - A = D - C$. Het na elkaar uitvoeren van twee translaties levert weer een translatie op. De translatie $\overrightarrow{AB}$ gevolgd door de translatie $\overrightarrow{BC}$ is de translatie $\overrightarrow{AC}$. De volgorde waarin we de translaties $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{BC}$ uitvoeren maakt geen verschil. We noteren het resultaat als $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, dus $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. Bij een translatie $\overrightarrow{PQ}$ en punt B is er precies één punt C zo dat $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BC}$. Dan $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. De translatie $X \mapsto X + P$ is de translatie $\overrightarrow{OP}$. De identieke transformatie $X \mapsto X$ is de translatie $\overrightarrow{OO}$. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{OO}$, de identieke transformatie, dus translatie $\overrightarrow{BA}$ is de inverse van translatie $\overrightarrow{AB}$. We noteren dit als $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ en schrijven $\overrightarrow{PQ} + -\overrightarrow{AB}$ korter als $\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{AB}$. De translaties van $\mathbb{R}^3$ vormen een transformatiegroep. We kunnen een transformatie $\overrightarrow{AB}$ met een getal t vermenigvuldigen: $t \cdot \overrightarrow{AB}$ is de translatie $X \mapsto X + t(B - A)$. Met deze bewerkingen vormen de translaties van $\mathbb{R}^3$ een lineaire ruimte met dezelfde wiskundige structuur als $\mathbb{R}^3$ zelf. Dat wordt direct duidelijk als we alle translaties van $\mathbb{R}^3$ in de vorm $\overrightarrow{OX}$ schrijven. Dan

$$\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OZ} \Leftrightarrow X + Y = Z \text{ en}$$

$$t \cdot \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OY} \Leftrightarrow t \cdot X = Y.$$

Definitie. De translaties $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{CD}$ met $A \neq B$, $C \neq D$ zijn *gelijkgericht*, wanneer er een $t > 0$ is zo dat $C - D = t(B - A)$. Ze zijn *tegengesteld gericht*, wanneer $C - D = t(B - A)$ met $t < 0$. $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{CD}$ zijn translaties *over dezelfde afstand*, als $t = \pm 1$.

Definitie. Een *affiene* afbeelding is een lineaire afbeelding gevolgd door een translatie.

We beperken ons voorlopig tot $\mathbb{R}^3$-$\mathbb{R}^3$- affiene afbeeldingen. Is F zo'n afbeelding, dan wordt F gegeven door

$$F(X) = L(X) + T = x_1 P + x_2 Q + x_3 R + T,$$

waarin L een lineaire $\mathbb{R}^3$-$\mathbb{R}^3$-afbeelding is en $X \mapsto X + T$ is de translatie $\overrightarrow{OT}$. F is omkeerbaar precies dan, wanneer het *lineaire deel* L omkeerbaar is ofwel $\det(L) \neq 0$. [Een translatie is sowieso omkeerbaar.] Als $\det(L) \neq 0$, dan is F een affiene transformatie van $\mathbb{R}^3$. We krijgen de inverse van de affiene transformatie $F(X) = L(X) + T$ door eerst de translatie $X \mapsto X - T$ en daarna L^{-1} uit te voeren.

Dus

$$F^{-1}(X) = L^{-1}(X - T) = L^{-1}(X) - L^{-1}(T)$$

Hieruit blijkt dat ook F^{-1} een affiene transformatie is. Toon aan dat twee affiene transformaties na elkaar uitgevoerd weer een affiene transformatie op leveren.

Dus:

7.2.2 De affiene transformaties van $\mathbb{R}^3$ vormen een transformatiegroep. De lineaire transformaties van $\mathbb{R}^3$ vormen hiervan een ondergroep. Ook de translaties van $\mathbb{R}^3$ vormen een ondergroep van de affiene transformaties van $\mathbb{R}^3$.

Afspraak. Met 'transformatie' zonder meer is hier steeds een transformatie van $\mathbb{R}^3$ bedoeld.

Een affiene transformatie $F(X) = L(X) + T$ is lineair precies dan, als $F(O) = O$ ofwel $T = O$. $F(X) = L(X) + T$ is een translatie, als $L = I$.

Definitie. Figuren die elkaars beeld zijn onder de transformaties uit een transformatiegroep $\mathcal{G}$ noemen we $\mathcal{G}$*-equivalent*.

Bij een transformatiegroep $\mathcal{G}$ is het belangrijk om na te gaan welke specifieke eigenschappen behouden blijven ofwel *invariant* zijn onder de transformaties uit de groep. Heeft een bepaalde figuur deze eigenschappen, dan hebben ook alle $\mathcal{G}$-equivalente figuren deze eigenschappen.

Pijlen en vectoren in $\mathbb{R}^3$. Een *pijl* met *beginpunt* A en *eindpunt* B, definiëren we in $\mathbb{R}^3$, net als in $\mathbb{R}^2$, als een geordend puntenpaar (A, B) en we gebruiken voor deze pijl dezelfde notatie $\overrightarrow{AB}$ als voor de translatie $F(X) = X + (B - A)$. Of met $\overrightarrow{AB}$ de pijl of de translatie bedoeld wordt moet blijken uit de context. Misverstand wordt ook voorkomen door het gebruik van de volledige omschrijving *pijl* $\overrightarrow{AB}$ resp. *translatie* $\overrightarrow{AB}$. We schrijven $\overrightarrow{AB}$ zonder meer, als we in een bewering of een definitie $\overrightarrow{AB}$ zowel als een pijl of als een translatie mogen opvatten. Translaties $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{CD}$ zijn identiek, notatie $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, als $B - A = D - C$. Pijlen $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{CD}$ zijn identiek, als $A = C$ en $B = D$.

Definitie. De pijlen $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{CD}$ met $A \neq B, C \neq D$ zijn *gelijkgericht*, wanneer er een $t > 0$ is zo dat $C - D = t(B - A)$. Ze zijn *tegengesteld gericht*, als $C - D = t(B - A)$ met $t < 0$. $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{CD}$ zijn even lang, als $t = \pm 1$.

Een pijl $\overrightarrow{OX}$ met beginpunt O wordt een *vector* genoemd. Een vector is eenduidig bepaald door zijn eindpunt X en wordt vaak aangeduid met de corresponderende kleine onderstreepte letter $\underline{x}$. Dus $\underline{a} = \overrightarrow{OA}$, $\underline{b} = \overrightarrow{OB}$, ... , etc. De optelling van vectoren en het vermenigvuldigen van een vector met een getal wordt gedefinieerd door

$$\underline{x} + \underline{y} = \underline{z} \Leftrightarrow X + Y = Z \text{ resp. } t \cdot \underline{x} = \underline{y} \Leftrightarrow t \cdot X = Y .$$

Met deze bewerkingen vormen de vectoren in $\mathbb{R}^3$ een 3-dimensionale *vectorruimte* met dezelfde wiskundige structuur als $\mathbb{R}^3$**.** In deze vectorruimte is $\underline{o} = \overrightarrow{OO}$ de *nulvector* en $\underline{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$, $\underline{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$ en $\underline{e}_3 = \overrightarrow{OE_3}$ zijn de *standaardbasisvectoren*.

Ook de verzameling van alle pijlen $\overrightarrow{AX}$ in $\mathbb{R}^3$ met een vast beginpunt A is een 3-dimensionale lineaire ruimte met de optelling en de vermenigvuldiging van een pijl met een getal gedefinieerd door

$$\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{AY} = \overrightarrow{AZ} \Leftrightarrow (X - A) + (Y - A) = Z - A \text{ en}$$

$$t \cdot \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AY} \Leftrightarrow t(X - A) = Y - A .$$

Als $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, dan is $ABCD$ een (mogelijk ontaard) parallellogram.

De pijl $\overrightarrow{AB}$ en de vector $\underline{b} - \underline{a}$ zijn even lang en hebben dezelfde richting [maar zijn niet identiek, als $A \neq O$].

Een affiene afbeelding F van $\mathbb{R}^3$ naar zichzelf induceert een afbeelding $\tilde{F}$ van de pijlen met beginpunt A naar de pijlen met beginpunt $F(A)$ d.m.v.

$$\tilde{F}(\overrightarrow{AX}) = \overrightarrow{F(A)F(X)} .$$

We noteren de geïnduceerde afbeelding $\tilde{F}$ meestal simpelweg als F. Ga na dat

$$F(\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{AY}) = F(\overrightarrow{AX}) + F(\overrightarrow{AY}) \text{ en } F(t \cdot \overrightarrow{AX}) = t \cdot F(\overrightarrow{AX}) ,$$

m.a.w. de geïnduceerde afbeelding is lineair. Als $F(A) = A$, dan is F een lineaire afbeelding van de pijlenruimte met beginpunt A naar zichzelf. Dit geldt i.h.b. voor de vectorruimte die bestaat uit de vectoren $\underline{x} = \overrightarrow{OX}$ met $X \in \mathbb{R}^3$.

7.3 Lijnen en vlakken in $\mathbb{R}^3$.

Definitie. Een *affiene deelruimte* van $\mathbb{R}^3$ is het translatiebeeld van een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^3$. De dimensie van de affiene deelruimte stellen we gelijk aan de dimensie van de corresponderende lineaire ruimte. Een affiene deelruimte met dimensie 1 noemen we een *lijn*, een affiene deelruimte met dimensie 2 is een *vlak*.

Als $P \neq O$, dan vormen de punten $X = t \cdot P$ met $t \in \mathbb{R}$ de lijn OP. Als $P, Q \neq O$ en de lijnen OP en OQ vallen niet samen, dan zijn P en Q lineair onafhankelijk en vormen de punten $X = t \cdot P + u \cdot Q$ met $t, u \in \mathbb{R}$ het vlak OPQ. Lijn OP en vlak OPQ gaan door O en zijn lineaire deelruimten van $\mathbb{R}^3$.

Als $A \neq B$, dan vormen de punten $X = A + t(B - A)$ de lijn AB door de punten A en B. Lijn AB is het translatiebeeld van de lijn OP met $P = B - A$ bij de translatie $\overrightarrow{OA}$. We noemen $X = A + t(B - A)$ een *parametervoorstelling*, afgekort pv, van lijn AB met *parameter* t. We noemen lijn OP de *richtingslijn* van lijn AB. Merk op dat de pv $X = A + t(B - A)$ de lijn AB in feite voorstelt als de beeldruimte van de affiene $\mathbb{R}$-$\mathbb{R}^3$-afbeelding $\varphi(t) = A + t(B - A)$. Afbeelding φ is een affiene transformatie van $\mathbb{R}$ naar de lijn AB. Lijn AB bestaat uit de punten X zo dat $\overrightarrow{AX} = t\overrightarrow{AB}$ voor zekere $t \in \mathbb{R}$.

Als A, B en C drie punten zijn die niet op één lijn liggen, dan vormen de punten $X = A + t(B - A) + u(C - A)$ het *vlak* ABC door de punten A, B en C. Vlak ABC is het translatiebeeld van vlak OPQ met $P = B - A$ en $Q = C - A$ bij de translatie $\overrightarrow{OA}$. We noemen $X = A + t(B - A) + u(C - A)$ een *parametervoorstelling*, afgekort pv, van vlak ABC met *parameters* t en u. We noemen vlak OPQ het *richtingsvlak* van vlak ABC. De pv $X = A + t(B - A) + u(C - A)$ stelt het vlak ABC voor als de beeldruimte van de affiene $\mathbb{R}^2$-$\mathbb{R}^3$-afbeelding $\varphi(t, u) = A + t(B - A) + u(C - A)$. Afbeelding φ is een affiene transformatie van $\mathbb{R}^2$ naar het vlak ABC. Vlak ABC bestaat uit de punten X zo dat $\overrightarrow{AX} = t\overrightarrow{AB} + u\overrightarrow{AC}$ voor zekere $t, u \in \mathbb{R}$.

Afspraak: Als we het hebben over lijn AB, dan veronderstellen we dat $A \neq B$. Als we het hebben over vlak ABC, dan veronderstellen we dat de punten A, B en C niet op één lijn liggen en dus een driehoek vormen.

Lijnen duiden we vaak aan met kleine letters k, l, m, … en vlakken duiden we aan met hoofdletters U, V, W, …

Definitie. Twee lijnen k en l die dezelfde richtingslijn hebben, noemen we *evenwijdig*, notatie $k \parallel l$. Twee vlakken V en W die hetzelfde richtingsvlak hebben, noemen we *evenwijdig*, notatie $V \parallel W$.

Definitie. Een pijl ligt op een lijn, wanneer zijn beginpunt en zijn eindpunt op de lijn liggen. Dit geldt i.h.b. voor een vector. De lijn heet dan de *drager* van de pijl of vector. Een vector die ligt op de richtingslijn van lijn k heet een *richtingsvector* van k. Een pijl ligt in een vlak, wanneer zijn beginpunt en zijn eindpunt in het vlak liggen. Dit geldt i.h.b. voor een vector. Een vector die ligt in het richtingsvlak van vlak V heet een *richtingsvector* van V. Een vector, die zijn eindpunt op een lijn k heeft, wordt een *steunvector* van k genoemd. Een vector, die zijn eindpunt in vlak V heeft, heet een *steunvector* van V.

Voorbeeld. Vlak ABC heeft vector $\underline{a}$ als steunvector en de vectoren $\underline{b}-\underline{a}$ en $\underline{c}-\underline{a}$ als richtingsvectoren. Het vlak bestaat uit de eindpunten van de vectoren

$$\underline{x} = \underline{a} + t(\underline{b}-\underline{a}) + u(\underline{c}-\underline{a}) .$$

We spreken dan van een *vectorvoorstelling* van vlak ABC.

Toon aan:

7.3.1 Twee lijnen zijn evenwijdig precies dan, wanneer ze elkaars beeld onder een translatie zijn. Twee vlakken zijn evenwijdig precies dan, wanneer ze elkaars beeld onder een translatie zijn.

7.3.2 De lijnen AB en CD zijn evenwijdig precies dan, wanneer er een $t \neq 0$ is zo dat $B - A = t(D - C)$.

7.3.3 Twee evenwijdige lijnen vallen samen of hebben geen enkel punt gemeen.

[Dat twee lijnen geen enkel punt gemeen hebben, hoeft in $\mathbb{R}^3$ niet te betekenen dat ze evenwijdig zijn. Het kunnen ook kruisende lijnen zijn. Zie de definitie na 7.3.14.]

7.3.4 Twee vlakken zijn evenwijdig precies dan, wanneer ze samenvallen of geen enkel punt gemeen hebben.

7.3.5 Als twee verschillende punten P en Q in vlak ABC liggen, dan ligt ieder punt van lijn PQ in vlak ABC. We zeggen dan dat lijn PQ in vlak ABC ligt. Ook het lijnstuk PQ, de halve lijn PQ en de pijl $\overrightarrow{PQ}$ liggen dan in vlak ABC.

Bewijs. Als $P = A + t_1(B-A) + u_1(C-A)$, $Q = A + t_2(B-A) + u_2(C-A)$, dan is $X = P + s(Q-P)$ te schrijven als $X = A + t_3(B-A) + u_3(C-A)$.

Definitie. Lijn k is *evenwijdig* met vlak V, notatie $k \parallel V$, als de richtingslijn van lijn k in het richtingsvlak van vlak V ligt.

7.3.6 Als lijn k evenwijdig is met vlak V, dan ligt lijn k in V of lijn k en vlak V hebben geen enkel punt gemeen.

7.3.7 Is k een lijn en P een punt, dan gaat door P precies één lijn l evenwijdig met k.

7.3.8 Een lijn k die niet evenwijdig is met vlak V snijdt vlak V in precies één punt.

7.3.9 Een punt X ligt in vlak OPQ precies dan, wanneer $\det(P,Q,X)=0$.

Het uitproduct in $\mathbb{R}^3$. Er geldt $\det(P,Q,X)=0 \Leftrightarrow n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3=0$ met

$$N(n_1,n_2,n_3)=\left(\begin{vmatrix} p_2 & q_2 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix},-\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix}\right)$$

[zie de opgave na 7.1.1]. N staat bekend als het *uitwendig product* van P en Q, notatie $P\times Q$. [De Engelse term is *'cross product'*.] $P\times Q$ wordt ook kortweg het *uitproduct* van P en Q genoemd.

Definitie. Uitproduct.

$$P\times Q=\left(\begin{vmatrix} p_2 & q_2 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix},-\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix}\right)=(p_2q_3-p_3q_2,p_3q_1-p_1q_3,p_1q_2-p_2q_1)$$

Opgave. Toon aan dat

$$P\times Q=\big(\det(E_1,P,Q),\det(E_2,P,Q),\det(E_3,P,Q)\big)$$

ofwel

$$P\times Q=\left(\begin{vmatrix} 1 & p_1 & q_1 \\ 0 & p_2 & q_2 \\ 0 & p_3 & q_3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 0 & p_1 & q_1 \\ 1 & p_2 & q_2 \\ 0 & p_3 & q_3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 0 & p_1 & q_1 \\ 0 & p_2 & q_2 \\ 1 & p_3 & q_3 \end{vmatrix}\right).$$

Opgave. Toon aan: $P\times Q\neq O \Leftrightarrow P$ en Q zijn lineair onafhankelijk.

Opgave. $Q\times P=-(P\times Q)$, $P\times P=O$, $(tP)\times Q=t(P\times Q)$ en $P\times(Q\pm R)=P\times Q \pm P\times R$. Toon dit aan.

7.3.10 Vlak OPQ bestaat uit de punten X die voldoen aan de vergelijking $n_1x+n_2y+n_3z=0$ met $N=P\times Q$.

We noemen $n_1x+n_2y+n_3z=0$ met $N=P\times Q$ een *vergelijking van vlak OPQ*. Ook is dan $rn_1x+rn_2y+rn_3z=0$ met $r\neq 0$ een vergelijking van vlak OPQ.

Opgave. Als $n_1x + n_2y + n_3z = 0$ een vergelijking is van vlak *OPQ*, dan zijn n_1, n_2 en n_3 niet alle drie gelijk aan 0. Als bijv. $n_1 \neq 0$, dan zijn liggen de punten $A(-n_2, n_1, 0)$ en $B(-n_3, 0, n_1)$ beide in vlak *OPQ* en de lijnen *OA* en *OB* vallen niet samen, dus vlak *OAB* is hetzelfde vlak als vlak *OPQ*. M.a.w. $X = tA + uB$ is een pv van vlak *OPQ*. Ga na dat $\det(A, B, X) = 0$ de vergelijking $n_1^2x + n_1n_2y + n_1n_3z = 0$ oplevert. Delen door $n_1 \neq 0$ geeft $n_1x + n_2y + n_3z = 0$. Idem als $n_2 \neq 0$ of $n_3 \neq 0$.

Toon aan dat algemener geldt:

7.3.11 Een punt X ligt in vlak ABC precies dan, wanneer

$$\det(B - A, C - A, X - A) = 0.$$

Met $N = (B - A) \times (C - A)$ kunnen we deze vergelijking schrijven als

$$n_1(x - a_1) + n_2(y - a_2) + n_3(z - a_3) = 0.$$

7.3.12 Als twee vlakken niet evenwijdig zijn, dan hebben beide vlakken precies één lijn gemeen, de *snijlijn* van beide vlakken. We noemen de vlakken dan *snijdende vlakken*.

Bewijs. Stel de vlakken *V* en *W* zijn niet evenwijdig. Volgens 7.3.4 hebben *V* en *W* dan een punt *A* gemeen. Hun richtingsvlakken zijn *OPQ* resp. *ORS*. We gaan na dat *OPQ* en *ORS* behalve punt *O* nog een punt $T \neq O$ gemeen hebben. Als *S* in vlak *OPQ* ligt, dan kunnen we $T = S$ nemen. Ligt *S* niet in vlak *OPQ*, dan bestaan er unieke getallen *x*, *y*, *z* zo dat $S = xP + yQ + zR$ en dan is $T = S - zR = xP + yQ$ het gezochte punt *T*. De lijn *OT* is de snijlijn van de vlakken *OPQ* en *ORS*. Er is een translatie die punt *O* afbeeldt op het gemeenschappelijk punt *A* van de vlakken *V* en *W*. Hierbij worden *OPQ* en *ORS* afgebeeld op *V* resp. *W*. De lijn *OT* word hierbij afgebeeld op de snijlijn van *V* en *W*.

Toon aan:

7.3.13 Is *V* een vlak en *P* een punt, dan gaat door *P* precies één vlak *W* dat evenwijdig is met *V*. Is $n_1x + n_2y + n_3z = c$ een vergelijking van *V*, dan wordt een vergelijking van *W* gegeven door $n_1x + n_2y + n_3z = d$ met $d = n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3$.

Als we $n_1x + n_2y + n_3z = c$ een vergelijking van een vlak noemen, dan veronderstellen we altijd stilzwijgend dat de coëfficiënten n_1, n_2 en n_3 niet alle drie gelijk aan 0 zijn.

Opgave. (i) Door een paar snijdende lijnen gaat precies één vlak.

(ii) Door twee verschillende evenwijdige lijnen gaat precies één vlak.

(iii) Ligt punt *P* niet op lijn *k*, dan gaat door *P* en *k* precies één vlak.

(iv) Is *V* een vlak en *P* een punt, dan liggen alle lijnen door *P* die evenwijdig zijn met *V* in hetzelfde vlak $W \parallel V$.

7.3.14 Twee lijnen die in één vlak liggen zijn òf evenwijdig òf snijden elkaar.

Definitie. Twee lijnen die niet in één vlak liggen noemen we *kruisende lijnen*.

Opgave. Twee kruisende lijnen hebben geen punt gemeen. Als k en l kruisende lijnen zijn en P is een punt, dan is er precies één vlak V door P zo dat $k \| V$ en $l \| V$.

Opgave. Als twee evenwijdige vlakken gesneden worden door een derde vlak, dan zijn de snijlijnen evenwijdig.

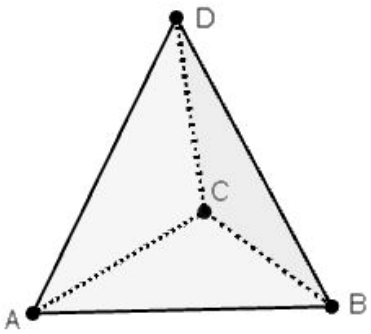
Opgave. Als drie verschillende vlakken elkaar twee aan twee snijden, dan zijn de drie snijlijnen òf evenwijdig [mogelijk samenvallend] òf de drie snijlijnen hebben precies één punt X gemeen. In het laatste geval is X het enige gemeenschappelijke punt van de drie vlakken.

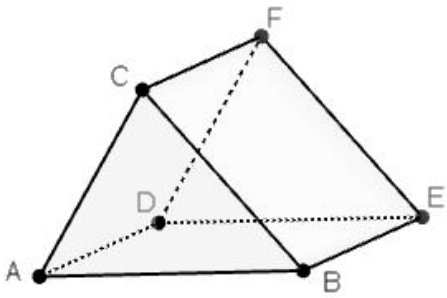
Opmerking. Worden de vergelijkingen van de vlakken uit de laatste opgave gegeven door

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = d_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = d_3 \end{cases}$$

dan kunnen we dit ook schrijven als $x_1A + x_2B + x_3C = D$. De vlakken hebben precies één punt X gemeen, als $\det(A,B,C) \neq 0$. Als $\det(A,B,C) = 0$ en geen twee van de drie vlakken zijn evenwijdig met elkaar, dan hebben de vlakken volgens de laatste opgave òf één gemeenschappelijke snijlijn of er zijn drie verschillende evenwijdige snijlijnen.

In de volgende twee figuren, met links een *viervlak* en rechts een *prisma*, komen we veel van de genoemde situaties met drie vlakken en hun snijlijnen tegen.





In viervlak *ABCD* gaan de snijlijnen *AD*, *CD* en *BD* van de zijvlakken *ABD*, *ACD* en *BCD* door één punt. In het prisma *ABC DEF* zijn de snijlijnen *AD*, *BE* en *CF* van de vlakken *ABED*, *ADFC* en *BEFC* evenwijdig. De vlakken *ABC* en *DEF* van het prisma

zijn evenwijdig en vlak *ABED* snijdt de vlakken *ABC* en *DEF* in de evenwijdige lijnen *AB* en *DE*.

Snijdt het vlak *V* de coördinaatassen in de punten $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ en $C(0,0,c)$ met $a,b,c \neq 0$, dan is

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

een vergelijking van vlak *V*. Met $a=b=c=1$ krijgen we de vergelijking $x+y+z=1$ van vlak $E_1E_2E_3$.

Een affiene transformatie van $\mathbb{R}^3$ is volledig bepaald, wanneer de beelden van vier punten, die niet in één vlak liggen, gegeven zijn.

Definitie. Vier punten die niet in één vlak liggen vormen de hoekpunten van een *viervlak*..

Het standaardviervlak in $\mathbb{R}^3$ is het viervlak $OE_1E_2E_3$. Een viervlak wordt ook een *driezijdige piramide* of een *tetraëder* genoemd.

7.3.15 *Alle viervlakken in* $\mathbb{R}^3$ *zijn affien equivalent.* Er is precies één affiene transformatie *F* van $\mathbb{R}^3$ die de hoekpunten *A*, *B*, *C* en *D* van viervlak *ABCD* in deze volgorde afbeeldt op de hoekpunten A', B', C' resp. D' van viervlak $A'B'C'D'$.

Bewijs. $G(X)=A+x_1(B-A)+x_2(C-A)+x_3(D-A)$ is de affiene transformatie die de hoekpunten van het standaardviervlak $OE_1E_2E_3$ in deze volgorde afbeeldt op de hoekpunten van het viervlak *ABCD*. Evenzo worden de hoekpunten van $OE_1E_2E_3$ door de affiene transformatie $H(X)=A'+x_1(B'-A')+x_2(C'-A')+x_3(D'-A')$ afgebeeld op het viervlak $A'B'C'D'$. De transformatie $F=H\circ G^{-1}$ heeft de in de stelling genoemde eigenschappen.

7.3.16 Onder een affiene transformatie *F* van $\mathbb{R}^3$ gaan lijnen over in lijnen, vlakken in vlakken en verhoudingen $\overrightarrow{AX}:\overrightarrow{AB}$ van drie verschillende punten *A*, *B* en *X* op een lijn blijven behouden.

Opmerking. Ook bij een affiene transformatie van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}^3$ gaan lijnen over in lijnen en blijven verhoudingen op lijnen behouden.

Bewijs. Wat betreft translaties is dit duidelijk. Het is dus voldoende om dit aan te tonen voor een lineaire transformatie *L*. Stel $L(A)=A'$, $L(B)=B'$ en $L(C)=C'$. Ga na dat

$$L(A+t(B-A))=A'+t(B'-A') \text{ en}$$

$$L(A+t(B-A)+u(C-A))=A'+t(B'-A')+u(C'-A').$$

Omgekeerd geldt :

7.3.17 Iedere afbeelding F van $\mathbb{R}^3$ naar $\mathbb{R}^3$, waarbij lijnen overgaan in lijnen en waarbij verhoudingen op een lijn intact blijven, is een affiene transformatie van $\mathbb{R}^3$.

[Vergelijk het bewijs van 1.4.12.]

7.3.18 Iedere afbeelding φ van het vlak $\mathbb{R}^2$ naar een vlak V in $\mathbb{R}^3$ waarbij lijnen overgaan in lijnen en waarbij verhoudingen op een lijn intact blijven, is een affiene transformatie van $\mathbb{R}^2$ naar V. De affiene eigenschappen van figuren in $\mathbb{R}^2$ komen overeen met de affiene eigenschappen van de corresponderende figuren in V. In feite is φ niets anders dan een (affiene) parametervoorstelling van vlak V.

We krijgen het bewijs van 7.3.18 met wat kleine aanpassingen in het bewijs van 1.4.12. Als $\varphi(O) = A$, bekijk dan eerst $\psi(X) = \varphi(X) - A$. Dan is ψ lineair, d.w.z.

$$\psi(X+Y) = \psi(X) + \psi(Y) \text{ en } \psi(t \cdot X) = t \cdot \psi(X).$$

Afbeelding ψ is een lineaire 1-1-correspondentie tussen $\mathbb{R}^2$ en zijn beeldruimte. Die beeldruimte is een vlak U door O. Translatie $\overrightarrow{OA}$ brengt vlak U op vlak V. Als $\psi(E_1) = P$ en $\psi(E_2) = Q$, dan krijgen we met $P + A = B$ en $Q + A = C$

$$\varphi(x, y) = xP + yQ + A = A + x(B - A) + y(C - A).$$

De affiene afbeelding φ is een parametervoorstelling van vlak ABC.

Op dezelfde manier is een parametervoorstelling $\varphi(t) = A + t(B - A)$, met $A \neq B$, een afbeelding van $\mathbb{R}$ op lijn AB, waarbij de verhoudingen intact blijven. Ook deze afbeelding φ is een affiene transformatie van $\mathbb{R}$ naar de lijn AB in $\mathbb{R}^2$ of $\mathbb{R}^3$. Er geldt

$$\varphi(s)\varphi(t) : \varphi(u)\varphi(v) = (t - s) : (v - u).$$

Als bijv. φ_1 en φ_2 parametervoorstellingen zijn van de vlakken V_1 resp. V_2 in $\mathbb{R}^3$, dan is $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ een affiene transformatie van vlak V_1 naar vlak V_2, waarbij lijnen corresponderen met lijnen en verhoudingen op een lijn k in V_1 gelijk zijn aan de corresponderende verhoudingen op de lijn $l = \varphi(k)$ in V_2.

Toon aan:

7.3.19 Als ABC en $A'B'C'$ driehoeken zijn in de vlakken V en W, dan is er precies één affiene transformatie φ van V naar W, waarbij driehoek ABC overgaat in driehoek $A'B'C'$.

Analoog:

7.3.20 Als k en l lijnen zijn met $A \neq B$ op k en $A' \neq B'$ op l, dan is er precies één affiene transformatie φ van k naar l, waarbij $\varphi(A) = A'$ en $\varphi(B) = B'$.

Voorbeeld. De lineaire transformatie $L=[A,B,C]$ van $\mathbb{R}^3$ beeldt het vlak $E_1E_2E_3$ af op het vlak ABC. L is een transformatie, dus $\det(A,B,C)\neq 0$. De vergelijking van vlak $E_1E_2E_3$ is $x+y+z=1$. Punt $X(x,y,z)$ in vlak $E_1E_2E_3$ wordt door L afgebeeld op punt $L(X)=xA+yB+zC$ met $x+y+z=1$. Is φ de beperking van L tot vlak $E_1E_2E_3$ [d.w.z. φ is alleen gedefinieerd voor X in vlak $E_1E_2E_3$ en voor zo'n X geldt $\varphi(X)=L(X)$], dan is φ een affiene transformatie van vlak $E_1E_2E_3$ naar vlak ABC. [Waarom is φ niet lineair?] L beeldt het richtingsvlak van vlak $E_1E_2E_3$ af op het richtingsvlak van vlak ABC.

Opgave. Wat moeten we verstaan onder een affiene transformatie van $\mathbb{R}$?

7.3.21 De vergelijking $\det(B-A,C-A,X-A)=0$ van vlak ABC in $\mathbb{R}^3$ kunnen we schrijven als

$$(*)\quad \det(X,B,C)+\det(A,X,C)+\det(A,B,X)=\det(A,B,C)\,.$$

Vlak ABC gaat door $O \Leftrightarrow \det(A,B,C)=0$.

[In vergelijking $(*)$ spelen de punten A, B en C een gelijkwaardige rol. Volgens afspraak zijn de punten A, B en C de hoekpunten van driehoek en liggen dus niet op één lijn.]

Opmerking. Stel $\det(A,B,C)\neq 0$. Dan is ABC een driehoek en vlak ABC gaat niet door O. Vergelijking $(*)$ in 7.3.21 is dan gelijkwaardig met

$$(**)\quad \frac{\det(X,B,C)}{\det(A,B,C)}+\frac{\det(A,X,C)}{\det(A,B,C)}+\frac{\det(A,B,X)}{\det(A,B,C)}=1\,.$$

Volgens 7.1.3 zijn er bij iedere $X\in\mathbb{R}^3$ uniek bepaalde getallen r, s, t zo dat

$$X=rA+sB+tC\,.$$

Punt X ligt in vlak ABC precies dan, wanneer X voldoet aan $(**)$. Ga na dat dit betekent dat X in vlak ABC ligt precies dan, wanneer $r+s+t=1$. [Zie ook 7.1.5 *Regel van Cramer*.]

7.3.22 Ieder punt X in vlak ABC kunnen we op precies één manier schrijven als

$$X=rA+sB+tC \text{ met } r+s+t=1\,.$$

Punt X ligt *binnen* driehoek ABC, als $r,s,t>0$.

Bewijs. Vlak ABC bestaat uit de punten $X=A+s(B-A)+t(C-A)$. Met $r=1-s-t$ kunnen we dit ook schrijven als $X=rA+sB+tC$. Stel nu dat

$$X=A+s(B-A)+t(C-A)=A+s'(B-A)+t'(C-A)\,.$$

Dus $s(B-A)+t(C-A)=s'(B-A)+t'(C-A)$. ABC is een driehoek, dus $B-A$ en $C-A$ zijn lineair onafhankelijk. Hieruit volgt $s=s'$, $t=t'$ en dus $1-s-t=1-s'-t'$.

Een punt X ligt binnen driehoek ABC, als X ligt tussen A en een punt P tussen B en C. Een punt P tussen B en C kunnen we schrijven als $P=B+u(C-B)$ met $0<u<1$. Een punt X tussen A en P kunnen we schrijven als $X=A+w(P-A)$ met $0<w<1$. Dan $X=A+w(P-A)=A+w((B+u(C-B))-A)=(1-w)A+w(1-u)B+wuC$. Dus

$$X=(1-w)A+w(1-u)B+wuC,$$

waarin $(1-w),w(1-u),wu>0$ en $(1-w)+w(1-u)+wu=1$.

Een analoge stelling voor een lijn in $\mathbb{R}^2$ of $\mathbb{R}^3$ luidt

7.3.23 Ieder punt X op lijn AB kunnen we op precies één manier schrijven als

$$X=rA+sB \quad \text{met} \quad r+s=1.$$

Punt X ligt *tussen* A en B, als $r,s>0$.

Opgave. Stel $P_i=r_iA+s_iB+t_iC$ met $r_i+s_i+t_i=1$ voor $i=1,2$ en $Q=xP_1+yP_2$ met $x+y=1$. Toon aan dat $Q=(xr_1+yr_2)A+(xs_1+ys_2)B+(xt_1+yt_2)C$ met

$$(xr_1+yr_2)+(xs_1+ys_2)+(xt_1+yt_2)=1.$$

Toon aan:

7.3.24 Als $ABCD$ een viervlak is, dan kunnen we ieder punt X in $\mathbb{R}^3$ op precies één manier schrijven als

$$X=rA+sB+tC+uD \quad \text{met} \quad r+s+t+u=1.$$

Een punt X ligt *binnen* viervlak $ABCD$, als $r,s,t,u>0$.

Opmerking. Een affiene afbeelding F die de punten A, B en C afbeeldt op de punten A', B' resp. C', beeldt punt $X=rA+sB+tC$ met $r+s+t=1$ af op het punt $X'=rA'+sB'+tC'$. [*Bewijs*. De bewering geldt in ieder geval, als F lineair is. De bewering geldt ook als F een translatie $F(X)=X+T$ is, want dan

$$X+T=r(A+T)+s(B+T)+t(C+T).$$

Een willekeurige affiene afbeelding F is een lineaire afbeelding gevolgd door een translatie.]

Algemener geldt: Een affiene afbeelding F die de punten $A_1,A_2,...,A_n$ afbeeldt op de punten $A_1',A_2',...,A_n'$, beeldt punt $X=r_1A_1+r_2A_2+\cdots+r_nA_n$ met $r_1+r_2+\cdots+r_n=1$ af op het punt $X'=r_1A_1'+r_2A_2'+\cdots+r_nA_n'$.

Opgave. Gebruik bovenstaande opmerking om 7.3.15, 7.3.19 en 7.3.20 nogmaals te bewijzen.

Opgave. Als $X = rA + sB + tC$ met $r + s + t = 1$, dan $X = A + s(B - A) + t(C - A)$ en ook $X = B + r(A - B) + t(C - B)$ en $X = C + r(A - C) + s(B - C)$.

Een affiene deelruimte van $\mathbb{R}^2$ of $\mathbb{R}^3$ is een punt, een lijn, een vlak of $\mathbb{R}^2$ resp. $\mathbb{R}^3$ zelf. Een affiene deelruimte is het translatiebeeld van zijn richtingsruimte [een lineaire ruimte] en heeft dezelfde dimensie als zijn richtingsruimte. Een verzameling $\{A\}$, die alleen punt A bevat, is een affiene deelruimte met dimensie 0 en heeft $\{O\}$ als richtingsruimte.

7.3.25 Een niet-lege deelverzameling V van $\mathbb{R}^2$ of $\mathbb{R}^3$ is een affiene deelruimte van $\mathbb{R}^2$ resp. $\mathbb{R}^3$ precies dan, wanneer V met de punten A en B ook alle *affiene combinaties* $rA + sB$ met $r + s = 1$ bevat.
[I.h.b. bevat V dan de lijn AB, als $A \neq B$.]

7.3.26 Een niet-lege deelverzameling V van $\mathbb{R}^2$ of $\mathbb{R}^3$ is een affiene deelruimte precies dan, wanneer V met de punten $A \neq B$ ook alle punten op de lijn AB bevat.
[Wanneer V uit precies één punt bestaat, dan is de voorwaarde op triviale wijze vervuld.]

Ga na dat iedere lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^2$ of $\mathbb{R}^3$ ook een affiene deelruimte van $\mathbb{R}^2$ resp. $\mathbb{R}^3$ is.

Toon aan:

7.3.27 Een affiene transformatie beeldt een affiene deelruimte af op een affiene deelruimte met dezelfde dimensie. Hierbij worden evenwijdige deelruimten afgebeeld op evenwijdige deelruimten.

Opmerking. Een affiene afbeelding, die niet een transformatie is [d.w.z. niet een 1-1-correspondentie is] beeldt een affiene deelruimte af op een affiene deelruimte met een dimensie die kleiner dan of gelijk is.

Definitie. Is V een niet-lege deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ of $\mathbb{R}^3$, dan noemen we V een *convexe* verzameling, wanneer V met A en B ook alle punten $rA + sB$ met $r + s = 1$ en $r, s > 0$ bevat. Is V convex, dan bevat V met de punten $A \neq B$ het hele lijnstuk AB.

Opgave. Toon aan dat iedere affiene deelruimte convex is.

Opgave. Toon aan dat een affiene transformatie van $\mathbb{R}^3$ een convexe verzameling afbeeldt op een convexe verzameling.

Opgave. De kleinste convexe verzameling, die de punten A en B, met $A \neq B$, bevat is het lijnstuk AB. De kleinste convexe verzameling, die driehoek ABC bevat bestaat uit de punten binnen de driehoek samen met de punten op de zijden van de driehoek. Omschrijf de kleinste convexe verzameling die de punten A, B, C en D bevat, wanneer deze vier punten niet in één vlak liggen.

Definitie. Is F een affiene transformatie van $\mathbb{R}^3$, dan noemen we een vlak dat door F op zichzelf wordt afgebeeld een *invariant vlak* van F en een lijn die door F op zichzelf wordt afgebeeld noemen we een *invariante lijn* van F. Een punt dat door F op zichzelf wordt afgebeeld heet een *invariant punt* of een *dekpunt* van F. Een lijn of een vlak waarin ieder punt een dekpunt van F is heet *puntsgewijs invariant* onder F.

Opgave. Bij een translatie $\overrightarrow{AB}$, met $A \neq B$, zijn er geen dekpunten en is iedere lijn evenwijdig met lijn AB een invariante lijn. Heeft een lijn k onder een affiene transformatie F twee verschillende dekpunten, dan is k puntsgewijs invariant onder F. Is F een affiene transformatie van $\mathbb{R}^3$ en PQR een driehoek in vlak V waarvan de hoekpunten dekpunten van F zijn, dan is vlak V puntsgewijs invariant onder F.

Definitie. De *beperking φ van afbeelding F tot een vlak V* is de afbeelding die alleen betrekking heeft op punten van V zo dat voor ieder punt X in V geldt $\varphi(X) = F(X)$. Voor punten die niet tot V behoren is φ niet gedefinieerd.

[Er wordt niet geëist van V invariant is onder F, m.a.w. voor X in V hoeft $F(X)$ niet tot V te behoren.]

7.3.28 Is F een affiene transformatie van $\mathbb{R}^3$, die een driehoek ABC in vlak V afbeeldt op een driehoek PQR die ook in vlak V ligt, dan is V invariant onder F. De beperking φ van F tot V is dan een affiene transformatie van V.

Evenwijdigheid van lijnen en vlakken is een affiene eigenschap. Toon aan:

7.3.29 Evenwijdigheid van lijnen en vlakken blijft behouden onder een affiene transformatie van $\mathbb{R}^3$.

Toon aan:

7.3.30 Is L een lineaire transformatie van $\mathbb{R}^3$ en V is een invariant vlak van L dat niet door O gaat, dan zijn ook alle vlakken die evenwijdig zijn met V invariante vlakken van L.

Opgave. Formuleer en bewijs ook de met 7.3.30 corresponderende stelling voor een lineaire transformatie van $\mathbb{R}^2$.

7.4 Inwendig product en loodrechte stand.

Het *standaard inwendig product* of kortweg *inproduct*, notatie $X \cdot Y$, wordt in $\mathbb{R}^3$ op soortgelijke wijze gedefinieerd als het inproduct in $\mathbb{R}^2$.

Definitie. Inproduct. $X \cdot Y = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 . y_3$.

Opmerking. $X \cdot Y$ [*'dot product'* in het Engels] is een getal. Daarentegen is $X \times Y$ [*'cross product'* in het Engels] uit de vorige paragraaf een punt.

Opgave. Ga na dat $(X + Y) \cdot Z = X \cdot Z + Y \cdot Z$, $(tX) \cdot Y = t(X \cdot Y)$ [dus de haakjes hierin zijn overbodig]. I.h.b. $O \cdot X = 0$. Als $X \neq O$, dan $X \cdot X > 0$. Verder $X \cdot Y = Y \cdot X$.

We kunnen nu de vergelijking $n_1 x + n_2 y + n_3 z = c$ van een vlak V korter noteren als $N \cdot X = c$. Is A een punt in dit vlak, dan $N \cdot A = c$. De vergelijking van V kunnen we dan schrijven als $N \cdot X = N \cdot A$ ofwel $N \cdot (X - A) = 0$.

Met behulp van het inproduct wordt gedefinieerd wanneer twee lijnen loodrecht op elkaar staan.

Definitie. De lijnen AB en CD staan loodrecht op elkaar, notatie $AB \perp CD$, precies dan, wanneer $(A - B) \cdot (C - D) = 0$. Dit geldt ook voor lijnstukken AB en CD. Idem voor translaties en pijlen $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{CD}$. Ook als $A = B$ of $C = D$, dan $AB \perp CD$.

Toon aan:

7.4.1 Twee lijnen k en l staan loodrecht op elkaar, notatie $k \perp l$, als hun richtingslijnen loodrecht op elkaar staan.

7.4.2 Als $k \perp l$ en $m \parallel l$, dan ook $k \perp m$.

Definitie. Een lijn ON staat loodrecht op vlak OPQ, wanneer $N \cdot P = 0$ en $N \cdot Q = 0$. M.a.w. lijn ON staat loodrecht op vlak OPQ, als ON loodrecht op de beide lijnen OP en OQ staat.

7.4.3 Er is precies één lijn ON die loodrecht op vlak OPQ staat.

Bewijs. N moet voldoen aan de vergelijkingen

$$\begin{cases} p_1 x + p_2 y + p_3 z = 0 \\ q_1 x + q_2 y + q_3 z = 0 \end{cases}$$

Dit zijn de vergelijkingen van twee vlakken door O die niet samenvallen. Deze vlakken hebben dus volgens 7.3.12 een snijlijn. Neem een punt $N \neq O$ op deze snijlijn. De punten op lijn ON zijn de enige punten die aan beide vergelijkingen voldoen.

Definitie. We noemen de lijn ON uit 7.4.3 de *normaal* van vlak OPQ en ook van alle vlakken, die vlak OPQ als richtingsvlak hebben. Iedere vector die op de normaal van een vlak ligt heet een *normaalvector* van dat vlak.

7.4.4 Als lijn *ON* loodrecht op vlak *OPQ* staat, dan staat lijn *ON* loodrecht op iedere lijn *OR* die in vlak *OPQ* ligt.

Bewijs Dit volgt uit: als $R = tP + uQ$, $N \cdot P = 0$ en $N \cdot Q = 0$, dan ook $N \cdot R = 0$.

Definitie. Lijn *l* staat loodrecht op vlak *V*, notatie $l \perp V$, als *k* evenwijdig is met de normaal van *V*.

Toon aan dat uit bovenstaande definities en stellingen volgt:

(a) Alle lijnen, die loodrecht op vlak *V* staan, zijn evenwijdig.

(b) Lijn *k* is evenwijdig met vlak *V*, als *k* loodrecht op de normaal van vlak *V* staat.

(c) Alle vlakken die loodrecht op een lijn *l* staan zijn evenwijdig.

(d) Het vlak met vergelijking $n_1x + n_2y + n_3z = c$ ofwel $N \cdot X = c$ heeft het vlak $N \cdot X = 0$ als richtingsvlak en de lijn *ON* als normaal.

(e) Als lijn *k* loodrecht staat op een paar snijdende lijnen in vlak *V*, dan staat *k* loodrecht op vlak *V*.

(f) Als $k \perp V$, dan staat lijn *k* loodrecht op iedere lijn in vlak *V*.

(g) Is *V* een vlak en *P* een punt, dan gaat door *P* precies één lijn *l* die loodrecht op *V* staat. We noemen deze lijn de *loodlijn* door punt *P* op vlak *V*. Het snijpunt P' van loodlijn *l* met *V* heet de *loodrechte projectie* van punt *P* op *V*.

Definitie. Twee vlakken met vergelijking $A \cdot X = c$ resp. $B \cdot X = d$ staan loodrecht op elkaar, wanneer $A \cdot B = 0$. Hun normalen *OA* en *OB* staan dan loodrecht op elkaar.

Er geldt $\det(P,Q,X) = 0 \Leftrightarrow n_1x + n_2y + n_3z = 0$ met

$$N(n_1,n_2,n_3) = \left(\begin{vmatrix} p_2 & q_2 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \right)$$

In de alinea voorafgaand aan 7.3.10 hebben we al kort kennisgemaakt met het *uitproduct* $P \times Q$. Daar zagen we dat we de vergelijking $\det(P,Q,X) = 0$ van vlak *OPQ* kunnen schrijven als $n_1x + n_2y + n_3z = 0$ met

$$N = P \times Q = \left(\begin{vmatrix} p_2 & q_2 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \right).$$

Dat betekent dat lijn *ON* met $N = P \times Q$ de normaal van vlak *OPQ* is. Vector $\overrightarrow{ON}$ is een normaalvector van vlak *OPQ*.

We kunnen de determinant $\det(P,Q,R)$ uitdrukken in het uitproduct en het inproduct:

7.4.5 $\det(P,Q,R) = (P \times Q) \cdot R = P \cdot (Q \times R)$.

Opgave. Ga na dat vergelijking $\det(B-A, C-A, X-A) = 0$ van vlak ABC gelijkwaardig is met $(A \times B + B \times C + C \times A) \cdot X = \det(A,B,C)$.

7.5 Lengtes, afstanden en hoeken.

Schrijven we $A \cdot A$ korter als A^2, dan stelt $A^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ het kwadraat van de lengte van lijnstuk *OA* voor. Algemener vatten we

$$(A-B)^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2$$

op als het kwadraat van de lengte van lijnstuk *AB*. De lengte van lijnstuk *AB* noteren we als $|A-B|$.

Definitie. $|A-B| = \sqrt{(A-B)^2}$ en $|A| = |A-O| = \sqrt{A^2}$.

Met deze notatie geldt $(A-B)^2 = |A-B|^2$ en $A^2 = |A|^2$.

NB $\sqrt{(A-B)^2} = |A-B|$ en niet $\sqrt{(A-B)^2} = A-B$! Het laatste is onzin.

De lengte van lijnstuk *AB* wordt ook als $|AB|$ geschreven, dus $|AB| = |A-B|$.

Als $A \neq B$, dan $|A-B| > 0$.

Ga na dat

$|B-A| = |A-B|$,

$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2A \cdot B + B^2$ en

$(A+B)^2 = (A-B)^2 \Leftrightarrow A \cdot B = 0 \Leftrightarrow OA \perp OB$.

$|AB|$ kunnen we ook zien als de *afstand* van *A* tot *B*.

Opmerking. Bij getallen *a* en *b* geldt $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$. Maar bij het inproduct $A \cdot B$ in $\mathbb{R}^3$ is i.h.a. $(A \cdot B)^2 \neq A^2 \cdot B^2$. Wel geldt

7.5.1 *Ongelijkheid van Cauchy-Schwarz*.

$(A \cdot B)^2 \leq A^2 \cdot B^2$ of gelijkwaardig $|A \cdot B| \leq |A| \cdot |B|$

Bewijs. Werk $(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$ uit en breng alles naar rechts. Dat laat zien dat

$$(\#)\ (A \cdot B)^2 \leq A^2 \cdot B^2 \Leftrightarrow 0 \leq (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 .$$

Een som van kwadraten is ≥ 0, dus $(A \cdot B)^2 \leq A^2 \cdot B^2$ ofwel $|A \cdot B| \leq |A| \cdot |B|$.

Opmerking. $(a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2$ in het bewijs van 7.5.1 is gelijk is aan $(A \times B)^2$. Als $A = O$ of $B = O$, dan $A \times B = O$. Als $A, B \neq O$, dan $A \times B = O \Leftrightarrow$ de lijnen OA en OB vallen samen. Uit het bewijs van 7.5.1 blijkt verder [hoe?] dat

$$\boxed{(A \times B)^2 = A^2 \cdot B^2 - (A \cdot B)^2} \text{ en dus}$$

$$\boxed{|A \times B| = |A| \cdot |B| \Leftrightarrow A \cdot B = 0}.$$

Toon aan dat $E_1 \times E_2 = E_3$, $E_2 \times E_3 = E_1$ en $E_3 \times E_1 = E_2$.

Er geldt $\det(A, B, C) = (A \times B) \cdot C$. Met $C = A$ of $C = B$ geeft dit

$$\boxed{(A \times B) \cdot A = (A \times B) \cdot B = 0}.$$

En met $C = A \times B$ krijgen we

$$\boxed{\det(A, B, A \times B) = (A \times B) \cdot (A \times B) = (A \times B)^2 = |A \times B|^2}.$$

7.5.2 *Driehoeksongelijkheid.* $|A \pm B| \leq |A| + |B|$.

Bewijs. $(A + B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2 \leq A^2 + 2|A \cdot B| + B^2$. Uit 7.5.1 volgt dan $(A + B)^2 \leq A^2 + 2|A| \cdot |B| + B^2 = (|A| + |B|)^2$. Dit is gelijkwaardig met $|A + B| \leq |A| + |B|$. Vervangen we B door $-B$, dan krijgen we $|A - B| \leq |A| + |B|$.

Toon aan dat $\boxed{|AC| \leq |AB| + |BC|}$.
[Als ABC een driehoek is, dan $|AC| < |AB| + |BC|$.]

We breiden de definitie van determinant en inproduct uit naar translaties en pijlen, i.h.b. vectoren:

Definitie. $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \det(B - A, C - A, D - A)$ en
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (B - A) \cdot (D - C)$.

Hiermee krijgen we ook $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ en $|\overrightarrow{AB}| = |AB|$.

Voor pijlen met een vast beginpunt A definiëren we het uitproduct $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$:

Definitie. $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow X - A = (B - A) \times (C - A)$.

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ is dus weer een pijl met beginpunt A. Uit het bovenstaande volgt

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AB} \text{ en } \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AC}}.$$

$$\boxed{\text{Als } ABC \text{ een driehoek is, dan } \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|^2 > 0}.$$

Opgave. Ga na dat

$$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

[Het rechterlid is een 4×4 -determinant.]

7.5.3 De vergelijking $\det(B-A, C-A, X-A)=0$ van vlak ABC kunnen we nu schrijven als $\big((B-A)\times(C-A)\big)\cdot(X-A)=0$ en ook als $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AX}=0$.

We schrijven in formules, waarin geen verwarring kan optreden tussen een lijnstuk PQ en zijn lengte $|PQ|$ weer simpelweg PQ i.p.v. $|PQ|$.

Definitie. Een *hoek* definiëren we in $\mathbb{R}^3$ net als in $\mathbb{R}^2$ als een paar halve lijnen met een gemeenschappelijk beginpunt. Bij $\angle APB$ met $A,B\neq P$ zijn de halve lijnen PA en PB de *benen* van de hoek en P is het *hoekpunt*. We definiëren de cosinus van $\angle APB$ d.m.v.

$$\cos\angle APB = \frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}}{PA\cdot PB},$$

We schrijven $\angle APB$ ook als $\angle(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB})$.

Opmerking. Met $P=O$ krijgen we $\cos\angle AOB = \dfrac{A\cdot B}{|A|\cdot|B|}$

ofwel $\boxed{A\cdot B = |A|\cdot|B|\cdot\cos\angle AOB}$.

7.5.4 Als $|A|=1$, dan $\cos\angle E_1OA = E_1\cdot A = a_1$. Evenzo $\cos\angle E_2OA = a_2$ en $\cos\angle E_3OA = a_3$. Stellen we $\angle E_iOA=\alpha_i$, dan

$$A=(\cos\alpha_1,\cos\alpha_2,\cos\alpha_3) \text{ en } \cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3=1.$$

Gevolg: Als $|X|=r>0$, dan is X op precies één manier te schrijven als

$$X = r\cdot(\cos\alpha_1,\cos\alpha_2,\cos\alpha_3) \text{ met } \angle E_iOX=\alpha_i \text{ voor } i=1,2,3.$$

De hoeken α_1,α_2 en α_3 heten de *richtingshoeken* van vector $\overrightarrow{OX}$.

Definitie. Hoeken $\angle APB$ en $\angle CQD$ noemen we *gelijk* en schrijven

$$\angle APB = \angle CQD\,,$$

als deze hoeken dezelfde cosinus hebben. We stellen

$$\angle APB > \angle CQD \;\Leftrightarrow\; \cos\angle APB < \cos\angle CQD\,.$$

Er geldt $\cos\angle APB = -1$, als $\overrightarrow{PA}$ en $\overrightarrow{PB}$ tegengesteld gericht zijn. Dan is $\angle APB$ een *gestrekte hoek* en $\angle APB = \pi = \angle E_1O(-E_1)$.

Als $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PB}$, dan $\cos\angle APB = 0$ en $\angle APB = \frac{1}{2}\pi = \angle E_1OE_2$ is een *rechte hoek*.

Als $\overrightarrow{PA}$ en $\overrightarrow{PB}$ dezelfde richting hebben, dan $\cos\angle APB = 1$, de benen van de hoek vallen samen en $\angle APB = o = \angle E_1OE_1$.

Als $\frac{1}{2}\pi < \angle APB < \pi$, dan is $\angle APB$ een *stompe hoek*.

Als $o < \angle APB < \frac{1}{2}\pi$, dan is $\angle APB$ een *scherpe hoek*.

In $\mathbb{R}^2$ geldt $\sin\angle APB = \dfrac{\det(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB})}{PA\cdot PB}$. Dat is in $\mathbb{R}^3$ uiteraard niet bruikbaar.

We stellen daarom voor hoeken in $\mathbb{R}^3$:

Definitie. $\sin\angle APB = \sqrt{1-\cos^2\angle APB}$

Dus $\cos^2\angle APB + \sin^2\angle APB = 1$. Verder $0 \le \sin\angle APB \le 1$, $\sin o = \sin\pi = 0$ en $\sin\frac{1}{2}\pi = 1$.

Uit $|A\times B|^2 = |A|^2\cdot|B|^2 - (A\cdot B)^2 = |A|^2\cdot|B|^2 - |A|^2\cdot|B|^2\cdot\cos\angle AOB$

$= |A|^2\cdot|B|^2\,(1-\cos^2\angle AOB) = |A|^2\cdot|B|^2\cdot\sin^2\angle AOB$ volgt:

7.5.5 $\sin\angle AOB = \dfrac{|A\times B|}{|A|\cdot|B|}$ en $\sin\angle APB = \dfrac{|\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}|}{PA\cdot PB}$.

Definitie. Als $\angle APB \neq \frac{1}{2}\pi$, dan $\tan\angle APB = \dfrac{\sin\angle APB}{\cos\angle APB} = \dfrac{|\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}|}{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}}$.

7.5.6 Als $P \cdot Q = P \cdot R = Q \cdot R = 0$, dan $|\det(P,Q,R)| = |P| \cdot |Q| \cdot |R|$.

Bewijs. Stel $P \cdot Q = P \cdot R = Q \cdot R = 0$. Dan $|P \times Q| = |P| \cdot |Q|$ (zie de opmerking na 7.5.1). Verder ligt punt $P \times Q$ op de lijn OR, dus $\cos \angle (P \times Q)OR = \pm 1$. Dus

$$\det(P,Q,R) = (P \times Q) \cdot R = |P \times Q| \cdot |R| \cdot \cos \angle (P \times Q)OR = \pm |P| \cdot |Q| \cdot |R|.$$

De hoek tussen twee lijnen in $\mathbb{R}^3$ wordt op dezelfde manier gedefinieerd als de hoek tussen twee lijnen in $\mathbb{R}^2$.

Definitie. De hoek tussen twee lijnen.

Zijn k en l lijnen met richtingsvectoren $\overrightarrow{OP}$ resp. $\overrightarrow{OQ}$ zo dat $P,Q \neq O$ en $o \leq \angle(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}) \leq \frac{1}{2}\pi$, dan stellen we $\angle(k,l) = \angle(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ})$.

[Ga na dat we bij twee lijnen k en l altijd zulke richtingsvectoren kunnen vinden.]

Uit de definitie volgt: Als $k' \| k$, $l' \| l$, dan $\angle(k',l') = \angle(k,l)$.

Definitie. De hoek tussen twee vlakken.

Zijn V en W vlakken met normaal n_V resp. n_W, dan stellen we $\angle(V,W) = \angle(n_V, n_W)$.

Uit de definitie volgt: Als $V' \| V$, $W' \| W$, dan $\angle(V',W') = \angle(V,W)$.

Definitie. De hoek tussen een lijn k en een vlak V.

Als lijn k loodrecht op vlak V staat, dan $\angle(k,V) = \frac{1}{2}\pi$.

Als lijn k niet loodrecht op vlak V staat, dan gaat door lijn k precies één vlak W dat loodrecht op vlak V staat en we stellen dan $\angle(k,V) = \angle(k,l)$, waarin l de snijlijn van de vlakken V en W is.

7.6 Multilineaire functies en afbeeldingen.

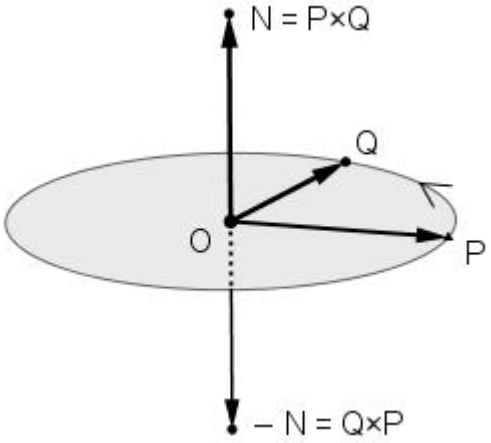
……

Deze paragraaf is hier niet opgenomen.

……

8 Oriëntatie en isometrieën in $\mathbb{R}^3$

8.1 Oriëntatie van een vlak in $\mathbb{R}^3$.



Is *V* een vlak door *O* met daarin punten $P, Q \neq O$ zo dat *OPQ* een driehoek is, dan is vector $\overrightarrow{ON}$ met $N = P \times Q$ een normaalvector van vlak *V* en van alle vlakken die vlak *V* als richtingsvlak hebben. Ook vector $-\overrightarrow{ON}$ is een normaalvector van deze vlakken. De normaalvectoren $\overrightarrow{ON}$ en $-\overrightarrow{ON}$ hebben dezelfde lengte, maar ze zijn tegengesteld gericht. Hun eindpunten N en $-N$ liggen aan verschillende kanten van het vlak *V*. Het vectordrietal $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{ON})$ heeft een positieve oriëntatie, d.w.z. $\det(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{ON}) > 0$ en dan $\det(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, -\overrightarrow{ON}) < 0$.

In de figuur hierboven liggen *P* en *Q* op de eenheidscirkel in vlak *OPQ* en ligt $N = P \times Q$ boven vlak *OPQ*. Gaan we in vlak *OPQ* van *P* naar *Q* over een cirkelboog, die kleiner is dan een halve cirkel, dan bewegen we ons vanuit *N* bekeken tegen de klok in. Bij gegeven *P* en *Q* vinden we de richting van de vector $\overrightarrow{ON}$ d.m.v. de '*kurkentrekkerregel*'. Nu bij veel wijnflessen de kurk vervangen is door een schroefdop kunnen we misschien beter spreken van de '*schroefdopregel*'. Is de cirkel in de figuur het bovenvlak van een schroefdop die vast zit op een fles, dan komt de schroefdop los, d.w.z. omhoog, als we de dop in de richting van de pijl van *P* naar *Q* draaien. Driehoek *OPQ* is vanuit *N* bekeken positief georiënteerd: als we de route $O \to P \to Q \to O$ over de zijden van driehoek *OPQ* volgen, dan draaien we, vanuit *N* bekeken, tegen de klok in.

Opmerking. De figuur geeft ook de manier aan waarop de aarde om haar as draait. Bekeken vanuit de noordpool *N* draait een punt op de evenaar tegen de wijzers van de klok in.

Een vergelijking van vlak *OPQ* is $N \cdot X = 0$ met $N = P \times Q$. Voor alle punten X in $\mathbb{R}^3$, die niet in vlak *OPQ* liggen, geldt òf $N \cdot X > 0$ òf $N \cdot X < 0$. Alle punten X met $N \cdot X > 0$ liggen aan dezelfde kant van vlak *OPQ* als het punt *N*. Voor zulke punten X geldt $N \cdot X = \det(P, Q, X) > 0$. Deze punten vormen een *halfruimte* van vlak *OPQ*. De punten X zo dat $N \cdot X = \det(P, Q, X) < 0$ vormen de andere *halfruimte* van vlak *OPQ*.

Opgave. De beide halfruimten van vlak *OPQ* zijn convexe puntenverzamelingen. Liggen de punten *A* en *B* in verschillende halfruimten van vlak *OPQ*, dan ligt tussen *A* en *B* een punt van vlak *OPQ*. Toon dit aan.

Wanneer *k* en *l* evenwijdige lijnen zijn, dan is er bij pijlen $\overrightarrow{AB}$ op *k* en $\overrightarrow{CD}$ op *l* zo dat $A \neq B$, $C \neq D$ een getal $t \neq 0$ zo dat $B - A = t(D - C)$. Als $t > 0$, dan hebben de pijlen $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{CD}$ dezelfde richting. Als $t < 0$, dan hebben de pijlen $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{CD}$ een tegengestelde richting.

Analoog:

Definitie. Als *V* en *W* evenwijdige vlakken zijn en *ABC* en *PQR* zijn driehoeken in *V* resp. *W*, dan zijn $\overrightarrow{ON}$ met $N = (B - A) \times (C - A)$ en $\overrightarrow{OK}$ met $K = (Q - P) \times (R - P)$ normaalvectoren van *V* [dus ook van *W*]. We zeggen dan dat de driehoeken *ABC* en *PQR* *dezelfde oriëntatie* hebben, wanneer $\overrightarrow{ON}$ en $\overrightarrow{OK}$ dezelfde richting hebben. *ABC* en *PQR* hebben een *tegengestelde oriëntatie*, wanneer $\overrightarrow{ON}$ en $\overrightarrow{OK}$ een tegengestelde richting hebben.

Toon aan:

8.1.1 Als *V* en *W* vlakken zijn met normaalvector $\overrightarrow{ON}$, $N \neq O$, en de driehoeken *ABC* en *PQR* liggen in *V* resp. *W*, dan hebben *ABC* en *PQR* dezelfde oriëntatie precies dan, wanneer de determinanten $\det(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$ en $\det(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR})$ beide positief of beide negatief zijn.

Georiënteerde hoeken in $\mathbb{R}^3$. Een hoek $\angle BAC$ is een puntenverzameling die bestaat uit de punten, die liggen op de halve lijnen *AB* en *AC*, de benen van de hoek. De volgorde van de benen doet er niet toe, $\angle BAC = \angle CAB$. Een georiënteerde hoek $\measuredangle BAC$ is, net als in $\mathbb{R}^2$, een geordend paar halve lijnen (AB, AC). Bij de georiënteerde hoek $\measuredangle BAC$ is de volgorde van de benen van belang. We noteren de hoeken $\angle BAC$ en $\measuredangle BAC$ ook als $\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ resp. $\measuredangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Met $-\measuredangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ is $\measuredangle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$ bedoeld.

Definitie. Als *V* en *W* evenwijdige vlakken zijn en *ABC* en *PQR* zijn driehoeken in *V* resp. *W*, dan zeggen we dat de hoeken $\measuredangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ en $\measuredangle(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR})$ *dezelfde oriëntatie* hebben, wanneer de driehoeken *ABC* en *PQR* dezelfde oriëntatie hebben.

Gelijkheid van georiënteerde hoeken is alleen gedefinieerd, wanneer ze in evenwijdige vlakken liggen:

Definitie. Als V en W evenwijdige vlakken zijn en ABC en PQR zijn driehoeken in V resp. W, dan zeggen we dat de georiënteerde hoeken $\measuredangle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ en $\measuredangle(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR})$ *gelijk* zijn, notatie $\measuredangle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \measuredangle(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR})$, wanneer $\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \angle(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR})$ en beide hoeken dezelfde oriëntatie hebben.

Opmerking. $\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \angle(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}) \Leftrightarrow \cos\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \cos\angle(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR})$. Zie 7.5.

Als de benen van een georiënteerde hoek op één lijn liggen, dan is de volgorde van de benen niet echt van belang. In overeenstemming hiermee breiden we bovenstaande definitie als volgt uit:

Definitie. Als $\measuredangle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ en $\measuredangle(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR})$ hoeken zijn, waarvan de benen op één lijn liggen, dan stellen we $\measuredangle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \measuredangle(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}) \Leftrightarrow \angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \angle(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR})$.

Opmerking. Alle vlakken, die loodrecht op een lijn l door O staan, zijn evenwijdig en hebben de lijn l als normaal. Het kan handig zijn om de richting van een vast gekozen vector op lijn l als de positieve richting op lijn l aan te wijzen. De tegengestelde richting is dan de negatieve richting. Driehoeken in vlakken die l als normaal hebben kunnen we dan onderscheiden in positief en negatief georiënteerde driehoeken. Hetzelfde geldt voor georiënteerde hoeken in deze vlakken, waarvan de benen niet op één lijn liggen.

Definitie. Als k en l lijnen zijn met richtingsvectoren $\overrightarrow{OP}$ resp. $\overrightarrow{OQ}$ zo dat $P,Q \neq O$ en $o \leq \angle(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}) \leq \frac{1}{2}\pi$, dan stellen we $\measuredangle(k,l) = \measuredangle(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ})$.

[Ga na dat we bij twee lijnen k en l altijd zulke richtingsvectoren kunnen vinden.]

Om te kunnen zeggen dat $\measuredangle(k',l') = \measuredangle(k,l)$, dan moeten de richtingsvectoren van de betrokken lijnen wel allemaal in één en hetzelfde vlak liggen. Dat is in elk geval zo, als $k' \parallel k$, $l' \parallel l$ en uit de definitie volgt dat dan $\measuredangle(k',l') = \measuredangle(k,l)$.

Definitie. De georiënteerde hoek tussen twee vlakken.

Als V en W vlakken zijn met normaal n_V resp. n_W, dan stellen we

$$\measuredangle(V,W) = \measuredangle(n_V, n_W).$$

Als $V' \parallel V$, $W' \parallel W$, dan $\measuredangle(V',W') = \measuredangle(V,W)$.

8.1.1 Als $A \cdot X = c$ en $B \cdot X = d$ vergelijkingen van de vlakken V resp. W zijn, dan

$$\measuredangle(V,W) = \measuredangle(OA,OB).$$

8.2 Viervlakken en bollen.

In $\mathbb{R}^3$ speelt een viervlak een rol die vergelijkbaar is met de rol van een driehoek in $\mathbb{R}^2$. We beschouwden een driehoek *ABC* als een geordend drietal punten, die niet op één lijn liggen. Evenzo beschouwen we een viervlak *ABCD* in $\mathbb{R}^3$ als een geordend viertal punten die niet in één vlak liggen. De *ribben* van dit viervlak zijn *AB*, *AC*, *AD*, *BC*, *BD* en *CD* [op te vatten als lijnstukken]. De driehoeken *ABC*, *ABD*, *BCD* en *ACD* zijn de vier *zijvlakken*. Bij twee viervlakken *ABCD* en $A'B'C'D'$ kunnen we eenduidig spreken over *corresponderende* hoekpunten, ribben, zijvlakken etc.

8.2.1 *Stelling van Pythagoras en zijn omgekeerde.* Driehoek *ABC* is een rechthoekige driehoek met $AC \perp BC$ precies dan, wanneer $AC^2 + BC^2 = AB^2$.

[Het bewijs is exact hetzelfde als voor een rechthoekige driehoek in $\mathbb{R}^2$].

Met de middelloodlijn van een lijnstuk *AB* in $\mathbb{R}^2$ correspondeert in $\mathbb{R}^3$ het *middelloodvlak* van lijnstuk *AB*. Dat is het vlak dat gaat door het midden $M = \frac{1}{2}(A+B)$ van lijnstuk *AB* en loodrecht op lijn *AB* staat.

8.2.2 Als $A \neq B$, dan is *X* een punt in het middelloodvlak van lijnstuk *AB* precies dan, wanneer de lijnstukken *AX* en *BX* even lang zijn, ofwel $AX = BX$. De vergelijking van dit middelloodvlak is

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MX} = 0 \text{ met } M = \tfrac{1}{2}(A+B).$$

Met een cirkel in $\mathbb{R}^2$ correspondeert in $\mathbb{R}^3$ een *bol*.

Definitie. Een *bol* met *middelpunt M* en *straal* $r > 0$ bestaat uit de punten *X* zo dat

$$XM = r.$$

De punten *X* zo dat $XM < r$ liggen *binnen* de bol, de punten *X* zo dat $XM > r$ liggen *buiten* de bol. Een lijn door het middelpunt van de bol heet een *middellijn* van de bol. Snijdt een middellijn de bol in de punten *A* en *B*, dan noemen we ook lijnstuk *AB* een middellijn van de bol en de lengte van een middellijn heet de *diameter* van de bol.

Een lijn door een punt *P* binnen een bol snijdt de bol in twee verschillende punten. Ligt punt *A* op de bol $XM = r$, dan heeft een lijn door *A* die loodrecht staat op de middellijn door *A* precies één punt met de cirkel gemeen. Deze lijn heet een *raaklijn* in *A* aan de bol. *A* is het *raakpunt* van deze raaklijn. Alle raaklijnen in punt *A* liggen in één vlak, het *raakvlak* in *A* aan de bol. De vergelijking van dit raakvlak is $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AX} = 0$. Voor een punt $X \neq A$ in dit raakvlak geldt $XM > AM$, m.a.w. zo'n punt ligt buiten de bol.

8.2.3 Door de hoekpunten van een viervlak gaat precies één bol, de *omgeschreven bol* van het viervlak. Het middelpunt van de omgeschreven bol is het snijpunt van de middelloodvlakken van de ribben van het viervlak.

Bewijs. Stel dat *k* de snijlijn is middelloodvlakken van de ribben *AB* en *BC* van viervlak A*BCD*. Dan geldt volgens 8.2.2 voor ieder punt *X* op *k* dat $AX = BX$ en $BX = CX$, en dus ook $AX = CX$. Laat *M* het snijpunt van lijn *k* met het middelloodvlak van ribbe *AD* zijn. Ga na dat de bol met middelpunt *M* en straal $r = MA$ door de hoekpunten *A*, *B*, *C* en *D* van viervlak *ABCD* gaat.

8.2.4 Een punt $C \neq A, B$ ligt op de bol met middellijn *AB* precies dan, wanneer driehoek *ABC* een rechthoekige driehoek is met $AC \perp BC$.

Bewijs. Stel $M = \frac{1}{2}(A+B)$ en $r = AM$. $C \neq A, B$ ligt op de bol met middellijn *AB* precies dan, wanneer $(M-C)^2 = (M-A)^2$. Dit is gelijkwaardig met

$$(A+B-2C)^2 = (B-A)^2$$

ofwel

$$((A-C)+(B-C))^2 = ((A-C)-(B-C))^2$$

en dit laatste is op zijn beurt gelijkwaardig met $(A-C)\cdot(B-C) = 0$ ofwel $AC \perp BC$. Merk op dat dit bewijs exact hetzelfde is als het bewijs van de stelling van Thales.

Een niet-lege deelverzameling *V* van $\mathbb{R}^3$ is een affiene deelruimte van $\mathbb{R}^3$ precies dan, wanneer *V* met twee verschillende punten *P* en *Q* ook de hele lijn *PQ* bevat. De kleinste affiene deelruimte van $\mathbb{R}^3$ die driehoek ABC omvat, is vlak ABC. De kleinste affiene deelruimte van $\mathbb{R}^3$ die viervlak *ABCD* omvat, is $\mathbb{R}^3$ zelf.

Opgave. *ABCD* is een viervlak. Wanneer ligt punt $X = rA + sB + tC + uD$ op een ribbe van het viervlak? Wanneer ligt *X* op een zijvlak? Wanneer ligt *X* in het binnengebied van het viervlak? Ga na dat het binnengebied van een viervlak een convexe verzameling is. Dat geldt ook nog als we de punten op de zijvlakken van het viervlak erbij nemen.

Opgave. Zijn *P* en *Q* de middens van de ribben *AB* en *CD* van viervlak *ABCD*, dan is punt $Z = \frac{1}{4}(A+B+C+D)$ het midden van lijnstuk *PQ*. Punt *Z* is het *zwaartepunt* en de lijnen *AZ*, *BZ*, *CZ* en *DZ* zijn de *zwaartelijnen* van viervlak *ABCD*. Deze zwaartelijnen gaan door de zwaartepunten van de driehoeken *ABC*, *ABD*, *BCD* en *ACD*. Is Z_1 het zwaartepunt van driehoek *ABC*, dan $AZ : ZZ_1 = 3:1$. Toon dit aan.

De afstand van een punt tot een vlak.

Definitie. Is V een vlak en P een punt, dan gaat door P precies één lijn l die loodrecht op vlak V staat. Is P' het snijpunt van vlak V en *loodlijn* l, dan noemen we P' de [loodrechte] *projectie* van P op V en $\mathrm{d}(P,V) = PP'$ is de *afstand van punt P tot vlak V.*

Stel V is het vlak met vergelijking $a_1x + a_2y + a_3z = c$ ofwel $A \cdot X = c$. Dan heeft de loodlijn l door P op V de pv $X = P + tA$. X is de projectie van P op V, als $A \cdot X = A \cdot (P + tA) = c$ ofwel $t = \dfrac{c - A \cdot P}{|A|^2}$. Dan $|PX| = |t| \cdot |A| = \dfrac{|c - A \cdot P|}{|A|}$.

Dus:

8.2.5 De afstand van punt P tot het vlak V met vergelijking $A \cdot X = c$ is

$$\mathrm{d}(P,V) = \frac{|A \cdot P - c|}{|A|}.$$

Zijn V en W twee evenwijdige vlakken, dan hebben alle punten in vlak W dezelfde afstand tot vlak V. We noemen dit de afstand van vlak V tot vlak W, notatie $\mathrm{d}(V,W)$.

8.2.6 Als V en W twee evenwijdige vlakken zijn met vergelijkingen

$$A \cdot X = c_1 \text{ resp. } A \cdot X = c_2,$$

dan

$$\mathrm{d}(V,W) = \mathrm{d}(W,V) = \frac{|c_1 - c_2|}{|A|}.$$

8.2.7 De afstand van punt D tot vlak ABC is gelijk aan

$$\mathrm{d}(D,ABC) = \frac{|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}.$$

Bewijs. Een vergelijking van vlak ABC is $\big((B-A) \times (C-A)\big) \cdot (X - A) = 0$ ofwel $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AX} = 0$. Dus $\mathrm{d}(D,ABC) = \dfrac{(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|} = \dfrac{|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}$.

Opmerking. Met $D = O$ krijgen we

$$\mathrm{d}(O,ABC) = \frac{|\det(B-A, C-A, -A|}{|(B-A) \times (C-A)|} = \frac{|\det(B,C,A|}{|(B-A) \times (C-A)|} = \frac{|\det(A,B,C|}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}$$

ofwel

$$\boxed{|\det(A,B,C)| = \mathrm{d}(O,ABC) \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}$$

Opgave. Vlak V raakt aan een bol met middelpunt M, als $\mathrm{d}(V,M) =$ straal van de bol.

De afstand van een punt tot een lijn.

Definitie. Is *P* een punt, dan ligt op lijn *AB* ligt precies één punt *Q* zo dat $PQ \perp AB$ en dan $d(P, \text{lijn } AB) = d(P,Q)$.

[*Q* is het snijpunt van lijn *AB* met het vlak door *P* loodrecht op lijn *AB*.]

Opgave. Als de lijnen *k* en *l* evenwijdig zijn, dan hebben alle punten op *k* dezelfde afstand tot lijn *l*. Is *P* een punt op *k*, dan $\mathrm{d}(k,l) = \mathrm{d}(P,l)$.

Opgave. Is lijn *k* evenwijdig met vlak *V*, dan hebben alle punten op *k* dezelfde afstand tot vlak *V*. Is *P* een punt op *k*, dan $\mathrm{d}(k,V) = \mathrm{d}(P,V)$.

Opgave. Hoe kunnen we de afstand van twee kruisende lijnen *k* en *l* definiëren en berekenen?

8.3 Congruenties en gelijkvormigheden van $\mathbb{R}^3$.

Loodrechte stand blijft i.h.a. niet behouden onder affiene transformaties van $\mathbb{R}^3$. Ga na dat loodrechte stand wel behouden blijft onder translaties. Om te bepalen welke affiene transformaties nog meer de loodrechte stand behouden is het dus voldoende om de lineaire transformaties $L(X) = x_1P + x_2Q + x_3R$ te bekijken. De eigenschappen van lineaire gelijkvormigheden van $\mathbb{R}^2$ doen vermoeden dat we moeten eisen dat

$$|P| = |Q| = |R| = r > 0 \text{ en dat } P \cdot Q = P \cdot R = Q \cdot R = 0 .$$

We gaan na dat dit inderdaad het geval is. Heeft L deze eigenschappen, dan $L(X) \cdot L(Y) = r^2 \cdot (X \cdot Y)$, zoals eenvoudig na te rekenen is. Hieruit volgt $L(X) \cdot L(Y) = 0 \Leftrightarrow X \cdot Y = 0$, dus onder L blijft loodrechte stand behouden. Verder $|L(X) - L(Y)| = r \cdot |X - Y|$, dus afstanden en lengtes worden met $r = |P| = |Q| = |R|$ vermenigvuldigd en blijven dus gelijk als $r = 1$.

Definitie. Een affiene transformatie $F(X) = x_1P + x_2Q + x_3R + T$ van $\mathbb{R}^3$ waarin $|P| = |Q| = |R| = r > 0$ en $P \cdot Q = P \cdot R = Q \cdot R = 0$ noemen we een gelijkvormigheidstransformatie of kortweg een *gelijkvormigheid* met (*gelijkvormigheids-*)*factor r*. Als $r = 1$ dan noemen we F een congruentietransformatie of kortweg een *congruentie*. Figuren die elkaars beeld zijn onder een gelijkvormigheid noemen we *gelijkvormig*. Figuren die elkaars beeld zijn onder een congruentie noemen we *congruent*.

8.3.1 Onder een gelijkvormigheid $F(X) = L(X) + T = x_1P + x_2Q + x_3R + T$ worden alle lengten van lijnstukken met eenzelfde factor $r = |P| = |Q| = |R| > 0$ vermenigvuldigd. Als $r = 1$, dan is F een congruentie.

Volgens 7.3.15 is een affiene transformatie volledig bepaald door de beelden van de hoekpunten van een viervlak. Het standaardviervlak $OE_1E_2E_3$ wordt door een gelijkvormigheid afgebeeld op een viervlak *ABCD* zo dat de ribben *AB*, *AC* en *AD* twee aan twee loodrecht op elkaar staan en alle drie dezelfde lengte hebben. Omgekeerd geldt ook dat er bij een viervlak *ABCD* met deze eigenschappen precies één gelijkvormigheid F is die $OE_1E_2E_3$ afbeeldt op *ABCD*.

Definitie. Een afbeelding F van $\mathbb{R}^3$ naar $\mathbb{R}^3$ zo dat $|F(X) - F(Y)| = |X - Y|$ voor iedere X en Y wordt een *isometrie* van $\mathbb{R}^3$ genoemd. Een isometrie laat afstanden onveranderd.

Iedere congruentie is een isometrie. Het omgekeerde geldt ook.

8.3.2 De isometrieën van $\mathbb{R}^3$ zijn precies de congruenties van $\mathbb{R}^3$.

Bewijs. Stel F is een transformatie van $\mathbb{R}^3$ zo dat $|F(X)-F(Y)|=|X-Y|$ voor iedere X en Y. Stel $F(O)=A$. We bekijken eerst de afbeelding $G(X)=F(X)-A$. Ga na dat G ook een isometrie is en $G(O)=O$. Onder G blijft ook het inproduct behouden, want

$$X\cdot Y=\tfrac{1}{2}\left(|X|^2+|Y|^2-|X-Y|^2\right).$$

Ook de loodrechte stand van lijnen blijft dus behouden. Stel $G(E_1)=P$, $G(E_2)=Q$ en $G(E_3)=R$. Dan $|P|=|Q|=|R|=1$, $P\cdot Q=0$, $P\cdot R=0$, $Q\cdot R=0$. Uit 7.5.6 volgt dat $\det(P,Q,R)=\pm 1$. We kunnen $Y=G(X)$ op precies één manier schrijven als $Y=rP+sQ+tR$. Dan $Y\cdot P=r$, $Y\cdot Q=s$ en $Y\cdot R=t$. Dus

$$r=Y\cdot P=G(X)\cdot G(E_1)=X\cdot E_1=x_1 \text{ en evenzo } s=x_2 \text{ en } t=x_3.$$

M.a.w.

$$G(X)=x_1P+x_2Q+x_3R \text{ en } F(X)=x_1P+x_2Q+x_3R+A.$$

Hiermee is aangetoond dat F een congruentie van $\mathbb{R}^3$ is. Omgekeerd is iedere congruentie van $\mathbb{R}^3$ een isometrie van $\mathbb{R}^3$.

Gevolg:

8.3.3 Een afbeelding F van $\mathbb{R}^3$ is een gelijkvormigheid van $\mathbb{R}^3$ precies dan, wanneer onder F alle lengtes van lijnstukken met een factor $r>0$ worden vermenigvuldigd.

[Bekijk de isometrie $G(X)=\frac{1}{r}F(X)$.]

Opgave. Een affiene transformatie van $\mathbb{R}^3$, die een bol op een bol afbeeldt, is een gelijkvormigheid.

Voorbeeld. Onder de affiene afbeelding φ van het vlak $\mathbb{R}^2$ op vlak ABC in $\mathbb{R}^3$, die gedefinieerd wordt door $\varphi(t,u)=A+t(B-A)+u(C-A)$ met $AB=AC=1$ en $AB\perp AC$, blijven afstanden behouden. Toon aan dat

$$|\varphi(t_1,u_1)-\varphi(t_2,u_2)|=|(t_1,u_1)-(t_2,u_2)|.$$

Voorbeeld. Onder de affiene afbeelding $\varphi(t)=A+t(B-A)$ van de lijn $\mathbb{R}$ op de lijn AB in $\mathbb{R}^2$ of $\mathbb{R}^3$ blijven afstanden behouden, wanneer $|AB|=1$. Toon aan dat dan $|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|=|t_1-t_2|$.

De affiene afbeeldingen uit de laatste twee voorbeelden zijn isometrieën.

Definitie. Een affiene afbeelding waaronder afstanden behouden blijven noemen we een *isometrie*.

Uit 7.5.6 volgt:

8.3.4 Als L een lineaire congruentie van $\mathbb{R}^3$ is, dan $\det(L) = \pm 1$.
Is L een lineaire gelijkvormigheid van $\mathbb{R}^3$ met factor $r > 0$, dan $\det(L) = \pm r^3$.

De lineaire afbeeldingen

$$L = [P,Q,R] = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{bmatrix} \text{ en } L^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix}$$

en ook hun matrices zijn elkaars getransponeerde [zie paragraaf 7.1]. Als L een congruentie van $\mathbb{R}^3$ is, dan is L^{T} de inverse van L [en dus ook een congruentie]. Ga na dat $L^{\mathrm{T}} \circ L = [L^{\mathrm{T}}(P), L^{\mathrm{T}}(Q), L^{\mathrm{T}}(R)] = [E_1, E_2, E_3] = I$. Dus $L^{\mathrm{T}} = L^{-1}$. Het omgekeerde geldt ook: als $L^{\mathrm{T}} = L^{-1}$, dan is L een congruentie.

Idem bij een lineaire congruentie van $\mathbb{R}^2$. Dit levert een handige manier om de matrix van de inverse van een lineaire congruentie te vinden:

8.3.5 L is een lineaire congruentie van $\mathbb{R}^2$ of $\mathbb{R}^3$ $\Leftrightarrow$ $L^{\mathrm{T}} = L^{-1}$.

Omdat $\det(L^{\mathrm{T}}) = \det(L)$, volgt hieruit nogmaals dat $\det(L) = \pm 1$, als L een lineaire congruentie is.

Definitie. Een congruentie $F(X) = L(X) + T$ van $\mathbb{R}^3$ met lineair deel L heet een *directe congruentie*, als $\det(L) = 1$, en een *gespiegelde congruentie*, als $\det(L) = -1$.

Opgave. Onder een gelijkvormigheid gaan hoeken over in gelijke hoeken.

8.4 Spiegelen t.o.v. een vlak.

Definitie. We noemen de punten X en X' elkaars *spiegelbeeld* t.o.v. het vlak *V* wanneer vlak *V* het middelloodvlak van lijnstuk XX' is, wanneer X niet in vlak *V* ligt. Ligt *X* wel in vlak *V*, dan $X' = X$. De afbeelding *S* die *X* afbeeldt op zijn spiegelbeeld X' heet de *spiegeling t.o.v. vlak V*. Vlak *V* is het *spiegelvlak* van deze spiegeling.

Het is duidelijk dat een spiegeling t.o.v. een vlak een transformatie van $\mathbb{R}^3$ is. Uit de definitie blijkt dat $X' = S(X) \Leftrightarrow X = S(X')$, dus *S* is zijn eigen inverse.

We bekijken eerst de spiegeling *S* t.o.v. vlak *V* door *O* met vergelijking $A \cdot X = 0$ en $|A| = 1$. Een loodlijn op vlak *V* is evenwijdig met de normaal *OA*. Dus het spiegelbeeld X' van *X* kunnen we schrijven als $X' = X + tA$. $M = \frac{1}{2}(X + X')$ ligt in *V*, dus

$$A \cdot (X + X') = A \cdot (2X + tA) = 2A \cdot X + t = 0 \text{ ofwel } t = -2A \cdot X .$$

De spiegeling *S* wordt dus gegeven door $S(X) = X' = X - 2(A \cdot X)A$. Hieruit blijkt dat *S* in ieder geval een lineaire transformatie van $\mathbb{R}^3$ is, die dus ook beschreven kan worden als $S(X) = x_1P + x_2Q + x_3R$ met $P = S(E_1) = E_1 - 2a_1A$, $Q = S(E_2) = E_2 - 2a_2A$ en $R = S(E_3) = E_3 - 2a_3A$. Ga na dat $S(X) \cdot S(Y) = X \cdot Y$, dus $P \cdot Q = 0$, $P \cdot R = 0$ en $Q \cdot R = 0$. Ook $|P| = |Q| = |R| = 1$. Dus *S* is een congruentie. Neem verder nog punten $B, C \neq O$ in spiegelvlak *V* zo dat de lijnen *OB* en *OC* niet samenvallen. Lijn *OA* is de normaal van vlak *V*. Dan $\det(A, B, C) \neq 0$ en

$$\det(S(A), S(B), S(C)) = \det(-A, B, C) = -\det(A, B, C) ,$$

terwijl ook

$$\det(S(A), S(B), S(C)) = \det(S) \cdot \det(A, B, C) .$$

Hieruit volgt $\det(S) = -1$. Dus $S = [P, Q, R] = [E_1 - 2a_1A, E_2 - 2a_2A, E_3 - 2a_3A]$ is een gespiegelde lineaire congruentie van $\mathbb{R}^3$ met matrix

$$S = \begin{bmatrix} 1-2a_1^2 & -2a_1a_2 & -2a_1a_3 \\ -2a_1a_2 & 1-2a_2^2 & -2a_2a_3 \\ -2a_1a_3 & -2a_2a_3 & 1-2a_2^2 \end{bmatrix}.$$

Er geldt $S^{\mathrm{T}} = S^{-1} = S$. Matrix *S* is symmetrisch t.o.v. zijn *hoofddiagonaal* [van linksboven naar rechtsonder].

8.4.1 De spiegeling S t.o.v. vlak V met vergelijking $A \cdot X = 0$ en $|A| = 1$ is de gespiegelde lineaire congruentie $S(X) = X - 2(A \cdot X)A = x_1P + x_2Q + x_3R$, waarin

$$P = S(E_1) = E_1 - 2a_1A,\ Q = S(E_2) = E_2 - 2a_2A \text{ en } R = S(E_3) = E_3 - 2a_3A\ .$$

[Vergelijk de corresponderende stelling 2.4.1. Merk op dat het geen verschil maakt, wanneer we A door $-A$ vervangen.]

Opmerking. Volgens 7.5.4 kunnen we A schrijven als

$$A = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3) \text{ met } \alpha_i = \angle E_iOA \text{ voor } i = 1,2,3\ .$$

Voorbeeld. De vergelijking $x + y + z = 0$ van vlak V is gelijkwaardig met $A \cdot X = 0$ waarin $A = (\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3})$. Dan $|A| = 1$ en de spiegeling S van $\mathbb{R}^3$ t.o.v. het vlak V wordt gegeven door

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Stel S is een spiegeling t.o.v. het vlak V door O. Om een punt X te spiegelen t.o.v. een vlak W dat niet door O gaat we als volgt te werk. Kies een punt P in vlak W en pas de translatie $\overrightarrow{PO}$ toe. Deze translatie beeldt vlak W af op een vlak $V \parallel W$ door O en punt X op punt $X - P$. Neem het spiegelbeeld $S(X - P)$ van $X - P$ t.o.v. V. Pas nu de translatie $\overrightarrow{OP}$ toe. Deze translatie brengt $S(X - P)$ naar $S(X - P) + P$ en V naar W. Ga na dat $X' = S(X - P) + P$ inderdaad het spiegelbeeld is van punt X t.o.v. vlak W.

8.4.2 Is S de spiegeling t.o.v. het richtingsvlak van een vlak W door punt P, dan wordt de spiegeling t.o.v. vlak W gegeven door

$$F(X) = S(X - P) + P$$

Spiegeling S is zijn eigen inverse. Ga na dat dit ook geldt voor de spiegeling F.

Uit $F(X) - P = S(X - P) \Leftrightarrow \overrightarrow{PF(X)} = S(\overrightarrow{PX})$, met P in het spiegelvlak W van F, blijkt dat de door de spiegeling F geïnduceerde transformatie $F(\overrightarrow{PX})$ van de pijlenruimte met beginpunt P gegeven wordt door $S(\overrightarrow{PX})$.

Stel nu dat in 8.4.2 W het vlak $A \cdot X = c$ met $|A| = 1$ is. Dan kunnen we $P = cA$ kiezen. Punt cA ligt op de normaal van vlak W, dus $S(cA) = -cA$. Met $P = cA$ krijgen we $F(X) = S(X - P) + P = S(X) + P - S(P) = S(X) + 2P$ ofwel

$$F(X) = X - 2(A \cdot X)A + 2cA.$$

Als $|A| \neq 1$, dan gaan we over op de vergelijking $\tilde{A} \cdot X = \tilde{c}$ met $\tilde{A} = A/|A|$ en $\tilde{c} = c/|A|$ van vlak W. Dus:

8.4.3 De spiegeling t.o.v. het vlak W met vergelijking $A \cdot X = c$ wordt gegeven door

$$F(X) = X - \frac{2(A \cdot X)A}{|A|^2} + \frac{2cA}{|A|^2}.$$

Voorbeeld. De spiegeling F t.o.v. vlak $E_1E_2E_3$ met vergelijking $x + y + z = 1$ kunnen we schrijven als

$$F(X) = X - \frac{2(A \cdot X)A}{|A|^2} + \frac{2cA}{|A|^2} \text{ met } A = (1,1,1) \text{ en } c = 1.$$

Ga na dat $F(X) = S(X) + 2N$, waarin S de spiegeling t.o.v. vlak $x + y + z = 0$ is [zie het vorige voorbeeld] en $N = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Uit 8.4.3 blijkt dat we iedere spiegeling t.o.v. een vlak W in $\mathbb{R}^3$ kunnen schrijven als een spiegeling t.o.v. zijn richtingsvlak V gevolgd door een translatie in een richting loodrecht op vlak V. Omgekeerd geldt: Als S een spiegeling is t.o.v. een vlak V door O, dan is de transformatie een spiegeling t.o.v. een vlak $W \parallel V$ precies dan, wanneer $F(F(X)) = X$. Ga na dat dit het geval is, als $T + S(T) = O$ ofwel $S(T) = -T$. Dat betekent dat $OT \perp V$. Met $S(T) = -T$ krijgen we

$$F(X) = S(X) + T = S(X) + \tfrac{1}{2}(T - S(T)) + \tfrac{1}{2}(T + S(T))$$

$$= S(X) + (C - S(C)) \text{ met } C = \tfrac{1}{2}T.$$

Als $S(T) \neq -T$, dan is F niet een spiegeling. De spiegeling $S(X) + \frac{1}{2}(T - S(T))$ wordt dan gevolgd door de translatie $X \mapsto X + \frac{1}{2}(T + S(T))$. Ga na dat

$$(T - S(T)) \cdot (T + S(T)) = 0.$$

Dus $X \mapsto X + \frac{1}{2}(T + S(T))$ is een translatie in een richting evenwijdig met V. De transformatie $F(X) = S(X) + T$ wordt dan een *schuifspiegeling* genoemd.

8.4.4 Is S een spiegeling t.o.v. een vlak V door O en $F(X) = S(X) + T$, dan liggen de middens $\frac{1}{2}(X + F(X))$ van de lijnstukken $XF(X)$ in een vlak $W \parallel V$ door punt $\frac{1}{2}T$. We kunnen $F(X)$ schrijven als $F(X) = S(X) + T_1 + T_2$ met

$$T_1 = \tfrac{1}{2}(T - S(T)) \text{ en } T_2 = \tfrac{1}{2}(T + S(T)).$$

Hieruit blijkt dat F bestaat uit de spiegeling $G(X) = S(X) + T_1$ met spiegelvlak W, gevolgd door de translatie $X \mapsto X + T_2$ in een richting die evenwijdig is met vlak V en dus ook met vlak W. Als $T_2 = O$, dan $F = G$ en dus een spiegeling. Als $T_2 \neq O$, dan noemen we F een *schuifspiegeling*. Een schuifspiegeling is een gespiegelde congruentie.

[Vergelijk het bewijs van de corresponderende stelling 2.4.4.]

Bij een spiegeling t.o.v. een vlak is het spiegelvlak puntsgewijs invariant en iedere lijn loodrecht op het spiegelvlak is invariant, maar niet puntsgewijs invariant. Ook een vlak dat loodrecht op het spiegelvlak staat is invariant onder een spiegeling. Bij een schuifspiegeling F, die bestaat uit een spiegeling t.o.v. vlak W en een translatie evenwijdig met W, zijn er geen dekpunten en is vlak W het enige invariante vlak.

Een viervlak beschouwen we als een geordend viertal punten, dus als we de viervlakken $ABCD$ en $A'B'C'D'$ congruent noemen, dan bedoelen we dat er een congruentie F is zo dat $F(A) = A'$, $F(B) = B'$, $F(C) = C'$ en $F(D) = D'$.

8.4.5 Twee viervlakken zijn congruent precies dan, wanneer de corresponderende ribben even lang zijn.

Bewijs. Onder een congruentie zijn corresponderende lijnstukken even lang. Omgekeerd: stel dat de corresponderende ribben van de viervlakken $ABCD$ en $PQRS$ even lang zijn.
(1) Als $A \neq P$, spiegel dan t.o.v. het middelloodvlak van lijnstuk AP. Dat brengt $ABCD$ op $PB'C'D'$. (2) Als $B' \neq Q$, spiegel dan t.o.v. het middelloodvlak van lijnstuk $B'Q$. Ga na dat dit middelloodvlak door punt P gaat. Dat brengt viervlak $PB'C'D'$ op viervlak $PQC''D''$. (3) Als $C'' \neq R$, spiegel dan t.o.v. het middelloodvlak van lijnstuk $C''R$. Ga na dat P en Q in dit middelloodvlak liggen en dus bij deze spiegeling op hun plaats blijven. Viervlak $PQC''D''$ gaat over in viervlak $PQRD'''$. (4) Als $D''' \neq S$, dan spiegelen we nog een keer t.o.v. het middelloodvlak van lijnstuk $D'''S$. Ga na dat dit middelloodvlak het vlak PQR is en dat P, Q en R bij deze spiegeling op hun plaats blijven. Hiermee is viervlak $ABCD$ d.m.v. hooguit 4 spiegelingen op viervlak $PQRS$ afgebeeld. Dus $ABCD \cong PQRS$.

Uit het bewijs van 8.4.5 blijkt:

8.4.6 Een congruentie van $\mathbb{R}^3$ kan tot stand worden gebracht door hooguit 4 spiegelingen.

De determinant van het lineaire deel van een spiegeling is gelijk aan -1. Het product van 2 of 4 spiegelingen is dus een directe congruentie. Het product van 3 spiegelingen is een gespiegelde congruentie.

De lineaire transformatie $L(X) = rX$ van $\mathbb{R}^3$ met $r \neq 0$ is de *vermenigvuldiging t.o.v. O met factor r*. *L* is een lineaire gelijkvormigheid met gelijkvormigheidsfactor $|r|$ [dat is het positieve getal waarmee de lengtes onder *L* vermenigvuldigd worden]. Er geldt $\det(L) = r^3$. *L* is de identieke transformatie, als $r = 1$. *L* is een gespiegelde congruentie als $r = -1$ en wordt dan een puntspiegeling t.o.v. *O* genoemd.

Algemener:

Definitie. De *vermenigvuldiging met een factor* $r \neq 0$ *t.o.v. punt A* is de gelijkvormigheid *F* die *A* op zichzelf afbeeldt en een punt $X \neq A$ afbeeldt op het punt X' zo dat $\overrightarrow{AX'} = r\overrightarrow{AX}$ ofwel $X' = A + r(X - A)$. Als $r = 1$, dan is *F* de identieke transformatie. *F* is een gespiegelde congruentie als $r = -1$ en wordt dan een *puntspiegeling t.o.v. A* genoemd

Uit $X' = A + r(X - A)$ volgt: een vermenigvuldiging *F* t.o.v. een punt *A* met factor $r \neq 0$, is een vermenigvuldiging t.o.v. *O* met factor *r* gevolgd door een translatie: $F(X) = X' = rX + (1 - r)A$. Dan $F^{-1}(X) = \frac{1}{r}X + (1 - \frac{1}{r})A$. Als $G(X) = sX + (1 - s)B$, dan is $G \circ F$ een vermenigvuldiging t.o.v. een punt [welk punt?] met factor $s \cdot r$ of een translatie, als $s \cdot r = 1$.

Dus:

8.4.7 De vermenigvuldigingen t.o.v. een punt en de translaties vormen samen een transformatiegroep van $\mathbb{R}^3$. De transformaties uit deze groep heten de *dilataties* van $\mathbb{R}^3$. De dilataties van $\mathbb{R}^3$ vormen een ondergroep van de gelijkvormigheden van $\mathbb{R}^3$.

Toon aan:

8.4.8 Is *F* een dilatatie van $\mathbb{R}^3$, *k* een lijn en *V* een vlak, dan is de beeldlijn $F(k)$ evenwijdig met *k* en is het beeldvlak $F(V)$ evenwijdig met *V*

Opgave. De enige affiene transformaties van $\mathbb{R}^3$ die ieder vlak *V* afbeelden op een vlak V' dat evenwijdig is met *V* zijn de dilataties van $\mathbb{R}^3$. De enige affiene transformaties van $\mathbb{R}^3$ die iedere lijn *k* afbeelden op een lijn k' die evenwijdig is met *k* zijn de dilataties van $\mathbb{R}^3$. Toon dit aan.

Toon ook aan:

8.4.9 Een gelijkvormigheid van $\mathbb{R}^3$ kan tot stand worden gebracht door een congruentie gevolgd door een vermenigvuldiging t.o.v. een punt.

8.5 Vlakke figuren.

Definitie. Een figuur [d.w.z. een verzameling punten], waarvan alle punten in één vlak liggen, noemen we een *vlakke figuur*. Een *ruimtelijke figuur* is een figuur die niet in een vlak ligt.

Vlakke figuren in $\mathbb{R}^3$ hebben dezelfde eigenschappen als de corresponderende figuren in $\mathbb{R}^2$. Een driehoek in $\mathbb{R}^3$ heeft dezelfde eigenschappen als een driehoek in $\mathbb{R}^2$ en hetzelfde geldt voor een parallellogram. Ook een hoek is een vlakke figuur. De doorsnede van een ruimtelijke figuur met een vlak levert [voor zover niet leeg] een vlakke figuur op .

Voorbeeld. Stel *M* is een punt in vlak *V*. Dan vormen de punten $X \in V$ zo dat $|XM| = r$ met $r > 0$ een *cirkel* met middelpunt *M* en straal *r* . Deze cirkel is de doorsnede van de bol met middelpunt *M* en straal *r* met het vlak *V*.

Een cirkel in $\mathbb{R}^3$ heeft dezelfde eigenschappen als een cirkel in $\mathbb{R}^2$.

Opgave. Is $XM = r$ met $r > 0$ de vergelijking van een bol, dan is een vlak *V* een *raakvlak* aan deze bol precies dan, wanneer $\mathrm{d}(M,V) = r$. De bol en vlak *V* hebben dan precies één punt *P*, het *raakpunt*, met elkaar gemeen en $MP \perp V$. Een lijn door raakpunt *P* die in raakvlak *V* ligt heet dat dan een *raaklijn* in *P* aan de bol. Ga na dat een vlak *V* de bol snijdt in een cirkel precies dan, wanneer $\mathrm{d}(M,V) < r$. Vlak *V* heeft geen punten met de bol gemeen, als $\mathrm{d}(k,M) > r$.

Door drie verschillende punten op een bol gaat precies één cirkel. Deze cirkel ligt op de bol.

Binnen een vlak *V* in $\mathbb{R}^3$ kunnen we de meetkunde op dezelfde manier bedrijven als in $\mathbb{R}^2$. Dat kan bijvoorbeeld door de keuze van een driehoek *ABC* in vlak *V*. Bij driehoek *ABC* is er precies één affiene transformatie φ van $\mathbb{R}^2$ naar vlak *V* , die driehoek OE_1E_2 in $\mathbb{R}^2$ afbeeldt op driehoek *ABC* in vlak *V*. Bij iedere *X* in *V* hoort dan een uniek getallenpaar (t,u) in $\mathbb{R}^2$ zo dat

$$X = \varphi(t,u) = A + t(B-A) + u(C-A) .$$

M.a.w. φ is een *affiene parametervoorstelling* [afgekort pv] die $\mathbb{R}^2$ transformeert naar vlak *V*, waarbij alle affiene eigenschappen van figuren in $\mathbb{R}^2$ wordt overgedragen op de corresponderende figuren in vlak *V*. I.h.b. gaan hierbij parallellogrammen in $\mathbb{R}^2$ over in parallellogrammen in vlak *V*. Opdat φ een isometrie is, moeten we driehoek *ABC* zo kiezen dat $AB = AC = 1$ en $AB \perp AC$. We noemen φ dan een *isometrische pv* van vlak *V*. Ga na dat in dat geval

$$|\varphi(t_1,u_1) - \varphi(t_2,u_2)| = |(t_1,u_1) - (t_2,u_2)| .$$

Er geldt $X = A + t(B - A) + u(C - A)$ precies dan, wanneer $\overrightarrow{AX} = t \cdot \overrightarrow{AB} + u \cdot \overrightarrow{AC}$. We kunnen φ dus ook zien als een lineaire transformatie van het vlak $\mathbb{R}^2$ naar de 2-dimensionale pijlenruimte die bestaat uit de pijlen $\overrightarrow{AX}$ met eindpunt *X* in *V*. Met φ gedefinieerd door $\varphi(t,u) = t \cdot \overrightarrow{AB} + u \cdot \overrightarrow{AC}$ geldt $\varphi(t_1,u_1) + \varphi(t_2,u_2) = \varphi(t_1 + t_2, u_1 + u_2)$ en $r\varphi(t,u) = \varphi(rt,ru)$. Wanneer $AB = AC = 1$ en $AB \perp AC$, dan blijft het inproduct onder φ behouden: $\varphi(t_1,u_1) \cdot \varphi(t_2,u_2) = (t_1,u_1) \cdot (t_2,u_2) = t_1 \cdot t_2 + u_1 \cdot u_2$.

Opmerking. Als het alleen om eigenschappen van figuren in *V* gaat waarbij afstanden, loodrechte stand, hoeken, etc. geen rol spelen, dan is het niet nodig om een isometrische pv van vlak *V* te kiezen.

Opmerking. Volgens 7.1.2 geldt $\det(L \circ M) = \det(L) \cdot \det(M)$. Met $L = [A,B,C]$ en $M = [X,Y,Z]$ krijgen we $L \circ M = [L(X), L(Y), L(Z)]$. Dus

(*) $\det(L(X), L(Y), L(Z)) = \det(X,Y,Z) \cdot \det(A,B,C)$.

Als *A, B, C* een basis van $\mathbb{R}^3$ is, dan is $L = [A,B,C]$ een lineaire transformatie van $\mathbb{R}^3$. Als $X = (t_1,u_1,0)$, $Y = (t_2,u_2,0)$ en $Z = (0,0,1)$, dan zijn $L(X) = t_1A + u_1B$, $L(Y) = t_2A + u_2B$ punten in vlak *OAB* en $L(Z) = C$ is een punt dat niet in vlak *OAB* ligt. Ga na dat

(**) $$\det(t_1A + u_1B, t_2A + u_2B, C) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} \cdot \det(A,B,C).$$

Door *C* met een geschikt getal $r \neq 0$ te vermenigvuldigen kunnen we er altijd voor zorgen dat $\det(A,B,C) = 1$. Ieder punt in vlak in *OAB* kunnen we op precies één manier schrijven als $\varphi(t,u) = tA + uB$. Dus (**) levert een geschikte formule voor een determinant in vlak *OAB*. Met deze keuze van *C* wordt vlak *OAB* tot een georiënteerd vlak. Ook alle vlakken die vlak *OAB* als richtingsvlak hebben zijn daarmee georiënteerd. Een driehoek *PQR* in zo'n vlak is dan positief georiënteerd [m.b.t. *C*], als

$\det(Q - P, R - P, C) > 0$.

Opgave. Als *ABC* een willekeurige driehoek in een vlak *V* is, dan zijn $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ lineair onafhankelijk. We kunnen dus iedere pijl $\overrightarrow{AX}$ met $X \in \mathbb{R}^3$ op precies één manier schrijven als $\overrightarrow{AX} = t\overrightarrow{AB} + u\overrightarrow{AC} + v(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})$. Punt *X* ligt in vlak *V* precies dan, wanneer $v = 0$. Met $\overrightarrow{AX_i} = t_i\overrightarrow{AB} + u_i\overrightarrow{AC} + v_i(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})$, $i = 1,2,3$, geldt

$$\det(\overrightarrow{AX_1}, \overrightarrow{AX_2}, \overrightarrow{AX_3}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \cdot \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}).$$

Dus i.h.b. met X_1, X_2 in V en $\overrightarrow{AX_3} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ krijgen we $\overrightarrow{AX_1} = t_1 \overrightarrow{AB} + u_1 \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AX_2} = t_2 \overrightarrow{AB} + u_2 \overrightarrow{AC}$ en

$$\det(\varphi(t_1,u_1), \varphi(t_2,u_2), \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = \det(t_1 \overrightarrow{AB} + u_1 \overrightarrow{AC}, t_2 \overrightarrow{AB} + u_2 \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})$$

$$= \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} t_1 & u_1 \\ t_2 & u_2 \end{vmatrix} \cdot \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})$$

Hierin is $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})$ gelijk aan $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|^2$, dus positief. Dus

$$\frac{\det(\varphi(t_1,u_1), \varphi(t_2,u_2), \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})}{\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})}$$

is altijd bruikbaar als determinant in de 2-dimensionale pijlenruimte die bestaat uit de pijlen $\overrightarrow{AX}$ met eindpunt X in V. Als $AB = AC = 1$ en $AB \perp AC$, dan

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|^2 = 1.$$

8.6 Samenstellen van spiegelingen.

Een congruentie *F* van $\mathbb{R}^3$ kunnen we tot stand brengen door hooguit 4 spiegelingen.

Een directe congruentie van $\mathbb{R}^3$ kunnen we schrijven als het product van 2 of 4 spiegelingen. Verder kunnen we letten op de dekpunten van *F*.

Toon aan:

8.6.1 Een congruentie *F* van $\mathbb{R}^3$ die een dekpunt heeft, kunnen we tot stand brengen door hooguit 3 spiegelingen.

[Dit geldt i.h.b. voor een lineaire congruentie.]

8.6.2 Een congruentie *F* van $\mathbb{R}^3$ die twee verschillende dekpunten heeft, kunnen we tot stand brengen door hooguit 2 spiegelingen.

[Als $A \neq B$ dekpunten van *F* zijn, dan is lijn *AB* puntsgewijs invariant onder *F*.]

8.6.3 Een congruentie van $\mathbb{R}^3$ met drie dekpunten *A*, *B* en *C*, die niet op één lijn liggen, is een spiegeling t.o.v. vlak *ABC* of de identieke transformatie van $\mathbb{R}^3$.

8.6.4 Is *F* de spiegeling t.o.v. vlak *V* en staat vlak *U* loodrecht op vlak *V*, dan is vlak *U* invariant onder *F* en de beperking van *F* tot *U* is de spiegeling van *U* t.o.v. de snijlijn *k* van *U* en *V*.

Stel F_1 en F_2 zijn spiegelingen met spiegelvlakken V_1 resp. V_2 die elkaar snijden in lijn *l*. Dan is lijn *l* puntsgewijs invariant t.o.v. $R = F_2 \circ F_1$ en ieder vlak *U* dat loodrecht staat op *l* is invariant onder *R*. Stel k_1 en k_2 zijn de snijlijnen van de vlakken V_1 resp. V_2 met zo'n vlak *U*. Dan is de beperking van *R* tot zo'n vlak *U* het product van de spiegeling in vlak *U* t.o.v. lijn k_1 gevolgd door de spiegeling in vlak *U* t.o.v. lijn k_2. Uit 3.5.6 volgt dat dit een rotatie van vlak *U* oplevert om het snijpunt *P* van lijn *l* met vlak *U* over hoek $\alpha = 2 \cdot \measuredangle(k_1, k_2)$. Ga na dat $\measuredangle(k_1, k_2)$ gelijk is aan de hoek tussen de normalen van V_1 en V_2, dus $\measuredangle(k_1, k_2) = \measuredangle(V_1, V_2)$.

Definitie. We noemen de hierboven beschreven congruentie *R de rotatie van* $\mathbb{R}^3$ *om de rotatie-as l met* $\alpha = 2 \cdot \measuredangle(V_1, V_2)$ *als rotatiehoek*.

Dus:

8.6.5 Als F_1 en F_2 de spiegelingen zijn met spiegelvlakken V_1 en V_2, die elkaar snijden in de lijn *l*, dan is $R = F_2 \circ F_1$ de rotatie met rotatie-as *l* en rotatiehoek $2 \cdot \measuredangle(V_1, V_2)$.

[I.p.v. V_1 en V_2 mogen we ook twee andere vlakken V_1' en V_2' kiezen die elkaar snijden in lijn *l* zo dat $\measuredangle(V_1, V_2) = \measuredangle(V_1', V_2')$.]

Opmerking. Het product van twee rotaties om dezelfde lijn kan de identieke transformatie I van $\mathbb{R}^3$ zijn. We noemen daarom I ook een rotatie. De rotatie-as van I kan iedere lijn in $\mathbb{R}^3$ zijn, de rotatiehoek is o.

Ga na dat uit 3.5.7 volgt:

8.6.6 Zijn F_1 en F_2 spiegelingen met evenwijdige spiegelvlakken V_1 en V_2, dan is $F_2 \circ F_1$ de translatie loodrecht op V_1 en V_2 in de richting van V_1 naar V_2 over tweemaal de afstand van V_1 tot V_2.

[I.p.v. V_1 en V_2 mogen we ook twee andere vlakken $V_1' \| V_2'$ kiezen, die elkaar snijden in lijn l zo dat $\mathrm{d}(V_1,V_2) = \mathrm{d}(V_1',V_2')$ en waarbij de richting van V_1' naar V_2' dezelfde is als de richting van V_1 naar V_2. Als $V_1 = V_2$, dan $F_2 = F_1$ en $F_2 \circ F_1 = I$.]

Voorbeeld. Stel de vlakken $A \cdot X = 0$ en $B \cdot X = 0$ met $|A| = |B| = 1$ vallen niet samen. De snijlijn van deze vlakken is de lijn ON met $N = A \times B$. Laat vector $\overrightarrow{ON}$ de positieve richting op lijn ON aangeven. Hierdoor worden de vlakken loodrecht op ON georiënteerde vlakken. S_1 is de spiegeling t.o.v. vlak $A \cdot X = 0$ en S_2 is de spiegeling t.o.v. vlak $B \cdot X = 0$. $S_2 \circ S_1$ is de rotatie met rotatie-as ON en $\alpha = 2 \cdot \sphericalangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ als rotatie-hoek. Merk op dat α gelijk blijft als we $\overrightarrow{OA}$ vervangen door $-\overrightarrow{OA}$ of $\overrightarrow{OB}$ vervangen door $-\overrightarrow{OB}$. Als $A \cdot B = 0$, dan $\alpha = \pi$. We noemen $S_2 \circ S_1$ dan de *spiegeling t.o.v. lijn ON*. Als $X' = S_2(S_1(X))$ dan ligt het midden van lijnstuk XX' op lijn ON en $XX' \perp ON$.

Definitie. Een rotatie om een lijn l met rotatiehoek $\alpha = \pi$ noemen we ook een *spiegeling van $\mathbb{R}^3$ t.o.v. lijn l.*

Afspraak. Naast de spiegeling t.o.v. een lijn is er ook nog de puntspiegeling. Als we het over een spiegeling van $\mathbb{R}^3$ zonder meer hebben, dan bedoelen we altijd een spiegeling t.o.v. een vlak.

Voorbeeld. Stel F is een rotatie om lijn ON met $N = (1,1,1)$. Lijn ON is de normaal van het vlak V door de punten E_1, E_2, E_3 en normaalvector $\overrightarrow{ON}$ geeft de positieve richting op lijn ON. Vlak V heeft $x + y + z = 1$ als vergelijking en de vlakken evenwijdig met V hebben een vergelijking van de vorm $x + y + z = c$ voor zekere c. De normaal ON snijdt vlak $x + y + z = c$ in punt $Z(\frac{1}{3}c, \frac{1}{3}c, \frac{1}{3}c)$. F is lineair. Als $F(E_1) = E_2$, dan $F(E_2) = E_3$ en $F(E_3) = E_1$, dus $F = [E_2, E_3, E_1]$ met $\det(F) = 1$ en $F(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_1, x_2)$. $F^3 = F \circ F \circ F = I$ [de identieke transformatie van $\mathbb{R}^3$], dus de rotatiehoek is $\frac{2}{3}\pi$. [Waarom niet $-\frac{2}{3}\pi$?]

Is F de rotatie om een lijn l met rotatiehoek α, dan is $G(X) = F(X) + T$ i.h.a. niet een rotatie. Hiertoe is nodig en voldoende dat $\overrightarrow{OT} \perp k$. Is dat niet het geval, dan kunnen we $\overrightarrow{OT}$ schrijven als $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OT_1} + \overrightarrow{OT_2}$ met $\overrightarrow{OT_1} \perp k$ en $\overrightarrow{OT_2} \parallel k$. G is dan de rotatie $F(X) + T_1$ om een lijn $k \parallel l$ gevolgd door een translatie $\overrightarrow{OT_2}$ evenwijdig l. G wordt dan een schroefbeweging genoemd:

Definitie. Een *schroefbeweging* is een rotatie om een lijn l gevolgd door een translatie $\overrightarrow{OT} \parallel l$ met $T \neq O$.

Opgave. Ga na dat een schroefbeweging geen dekpunten heeft. Er is precies één invariante lijn. Als de rotatie om l een spiegeling t.o.v. l is, dan is ieder vlak door l een invariant vlak.

Opgave. Om met spiegelingen een schroefbeweging tot stand te brengen zijn precies 4 spiegelingen nodig. Toon dit aan.

Uit het voorgaande volgt dat een congruentie met precies één dekpunt A het product van drie spiegelingen S_1, S_2 en S_3 is t.o.v. 3 verschillende vlakken V_1, V_2 en V_3 die door punt A gaan. Stel $F = S_3 \circ S_2 \circ S_1$. De snijlijn van V_1 en V_2 is l. $S_2 \circ S_1$ is de rotatie om l over $\alpha = 2 \cdot \measuredangle(V_1, V_2)$ gevolgd door de spiegeling S_3. We bekijken het geval dat het spiegelvlak V_3 van S_3 loodrecht op l staat. We noemen F dan een *gespiegelde rotatie* met rotatie-as l en rotatiehoek α. Als de vlakken V_1 en V_2 loodrecht op elkaar staan, dan $\alpha = \pi$, $S_2 \circ S_1$ is de spiegeling t.o.v. de lijn k en F is de *puntspiegeling t.o.v. punt A*. Als X' het beeld van X is bij de puntspiegeling t.o.v. punt A, dan is A het midden van XX'.

8.6.7 Stel R is de rotatie om lijn l met rotatiehoek α en S is een spiegeling t.o.v. een vlak V loodrecht op l, dan is $F = S \circ R$ de *gespiegelde rotatie* met rotatie-as l en rotatiehoek α. Het enige dekpunt van F is het snijpunt A van lijn l en vlak V. Vlak V is een invariant vlak en lijn l is een invariante lijn van F. Als $\alpha = \pi$, dan is R de *lijnspiegeling* t.o.v. lijn l en F is de *puntspiegeling* t.o.v. punt A.

[Is F een puntspiegeling t.o.v. A, dan is iedere lijn door A en ook ieder vlak door A invariant onder F.]

Opgave. Stel S_{xy}, S_{xz} en S_{yz} zijn de spiegelingen t.o.v. de coördinaatvlakken van $\mathbb{R}^3$. Ga na dat $S_O = S_{yz} \circ S_{xz} \circ S_{xy}$ de puntspiegeling t.o.v. O is.

8.6.8 Is L een lineaire congruentie van $\mathbb{R}^3$, dan is er minstens één punt $P \neq O$ zo dat $L(P) = P$ of $L(P) = -P$. De lijn OP is dan invariant onder L en ook ieder vlak met OP als normaal is invariant onder L.

Bewijs. Stel L is een lineaire congruentie van $\mathbb{R}^3$. De stelling is juist, als $L = I$ [de identieke transformatie van $\mathbb{R}^3$]. Neem in het volgende aan dat $L \neq I$. Als L de spiegeling t.o.v. het vlak $P \cdot X = 0$ is, dan is de stelling juist. Als $L = S_2 \circ S_1$, waarin S_1, S_2 de spiegelingen t.o.v. twee verschillende vlakken V_1, V_2 door O zijn, dan is L de rotatie om de snijlijn l van de spiegelvlakken V_1 en V_2. Voor ieder punt P op l geldt dan $L(P) = P$ en ieder vlak door O met normaal l is invariant onder L. Nu het geval dat $L = S_3 \circ S_2 \circ S_1$, waarin S_1, S_2 en S_3 de spiegelingen t.o.v. drie verschillende vlakken V_1, V_2 en V_3 door O zijn. De snijlijn van V_1 en V_2 is l. Als V_3 door l gaat, dan kunnen we V_1 en V_2 zo kiezen dat V_2 samenvalt met V_3 en dan $L = S_1$, een spiegeling. Daarmee is voor dit geval de stelling weer bewezen. Neem dus aan dat V_3 niet door l gaat. Bekijk nu de lineaire congruentie $M = S_O \circ L$, waarin S_O de puntspiegeling t.o.v. O is. Dan is M de samenstelling van 6 spiegelingen en heeft O als dekpunt, dus uit 8.6.1 volgt dat M het product van 2 spiegelingen is t.o.v. vlakken W_1 en W_2 door O. Als $W_1 = W_2$, dan $M = I$ en $L = S_O$. [Bedenk dat $S_O = S_O^{-1}$.] Als $W_1 \neq W_2$, dan is M de rotatie om een lijn l en lijn l is invariant onder $L = S_O \circ M$ Voor ieder punt P op l geldt $L(P) = -P$. Blijft over het geval dat $L = S_4 \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1$ het product is van 4 spiegelingen met spiegelvlakken V_1, V_2, V_3 en V_4 door O, waarbij we mogen aannemen dat $V_1 \neq V_2$ en $V_3 \neq V_4$. L is dan het product van twee rotaties $S_2 \circ S_1$ en $S_4 \circ S_3$. Uit 8.6.1 volgt dat dat we L als het product van twee spiegelingen kunnen schrijven, dus $L = I$ of L is een rotatie met rotatie-as l. Voor P op l geldt $L(P) = P$. Onder L blijft de loodrechte stand behouden, dus als lijn l invariant is onder L, dan geldt dit ook voor ieder vlak, waarvan l de normaal is.

Is $F(X) = L(X) + T$ een congruentie van $\mathbb{R}^3$ met lineair deel L en is lijn OP invariant onder L, dat kunnen we vector $\overrightarrow{OT}$ schrijven als $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OT_1} + \overrightarrow{OT_2}$ met $\overrightarrow{OT_1} \perp OP$ en $\overrightarrow{OT_2}$ een richtingsvector van OP. Hieruit volgt in combinatie met 8.6.8:

8.6.9 Stel $F(X) = L(X) + T$ is een congruentie van $\mathbb{R}^3$ met lineair deel L.

(i) Als $\det(L) = 1$, dan is F de identieke transformatie I, een translatie, een rotatie of een schroefbeweging.

(ii) Als $\det(L) = -1$, dan is F een spiegeling, een schuifspiegeling of een gespiegelde rotatie.

Opmerking. Een lijnspiegeling is een rotatie met rotatiehoek π. Een puntspiegeling is een gespiegelde rotatie met rotatiehoek π.

Opmerking. We noemden we de georiënteerde hoeken $\sphericalangle ABC$ en $\sphericalangle PQR$ in $\mathbb{R}^2$ gelijk, wanneer er een directe congruentie van $\mathbb{R}^2$ is die $\sphericalangle ABC$ afbeeldt op $\sphericalangle PQR$. Een analoge definitie is voor de gelijkheid van hoeken $\sphericalangle ABC$ en $\sphericalangle PQR$ in $\mathbb{R}^3$ onbruikbaar. Ga na dat er een directe congruentie van $\mathbb{R}^3$ is die $\sphericalangle ABC$ afbeeldt op $\sphericalangle PQR$ precies dan, wanneer $\angle ABC = \angle PQR$.

Opgave. Een congruentie φ van een vlak V in $\mathbb{R}^3$ kunnen we op precies 2 manieren uitbreiden tot een congruentie F van $\mathbb{R}^3$.

Symmetrie.

Definitie. Een congruentie van $\mathbb{R}^3$, die een figuur op zichzelf afbeeldt, heet een *symmetrie* van die figuur.

Ga na dat de symmetrieën van één bepaalde figuur een transformatiegroep $\mathcal{G}$ vormen. $\mathcal{G}$ heet de *symmetriegroep* van de figuur. Bevat $\mathcal{G}$ een spiegeling, dan heet de figuur *symmetrisch* t.o.v. het spiegelvlak van de spiegeling. Dit spiegelvlak wordt dan een *symmetrievlak* van de figuur genoemd. Zijn F en G spiegelingen in $\mathcal{G}$ met spiegelvlakken die elkaar snijden in de lijn l, dan behoort ook de rotatie $G \circ F$ tot $\mathcal{G}$ en de rotatie as l is dan een *symmetrie*as van de figuur. Bevat $\mathcal{G}$ een puntspiegeling t.o.v. een punt P, dan noemen we de figuur *puntsymmetrisch* t.o.v. P en P heet dan een *middelpunt* van de figuur.

Opmerking. Een figuur kan meerdere middelpunten hebben. Zo is een lijn puntsymmetrisch t.o.v. elk van zijn punten. Hetzelfde geldt voor een vlak.

Een symmetriegroep is natuurlijk alleen interessant wanneer hij meer symmetrieën bevat dan alleen de identieke transformatie I. De symmetriegroep van een bol met middelpunt M bevat alle congruenties die M als dekpunt hebben. [Als $M = O$, dan bevat de symmetriegroep van de bol alle lineaire congruenties.]

Opgave. Beschrijf alle symmetrievlakken van een kubus en ook alle symmetrieassen van deze kubus. Merk op dat de symmetriegroep van een kubus ook een puntspiegeling bevat, een kubus is dus puntsymmetrisch en heeft een middelpunt. Dit middelpunt is een dekpunt van iedere symmetrie van de kubus. Welke symmetrievlakken en symmetrieassen heeft een balk die geen kubus is?

Als de symmetriegroep $\mathcal{G}$ van een figuur een translatie $\overrightarrow{AB}$ met $A \neq B$ bevat, dat is de figuur niet begrensd. $\mathcal{G}$ bevat dan ook alle translaties $k \cdot \overrightarrow{AB}$ met $k \in \mathbb{Z}$.

8.7 De inhoud van een blok.

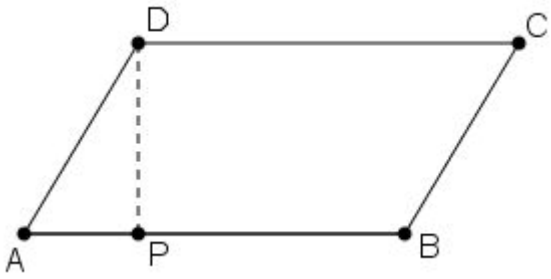
In $\mathbb{R}^2$ wordt de oppervlakte van driehoek *ABC*, notatie $\text{opp}(ABC)$, gedefinieerd d.m.v.

$$\text{opp}(ABC) = \tfrac{1}{2} \cdot \text{d}(C, \text{lijn } AB) \cdot AB \quad [\textit{'half keer basis keer hoogte'}].$$

Deze definitie is ook bruikbaar voor een driehoek *ABC* in $\mathbb{R}^3$. Toon op basis van deze definitie aan dat, wanneer *ABCD* een parallellogram is, de driehoeken *ABC* en *ACD* dezelfde oppervlakte hebben. De binnengebieden van beide driehoeken hebben geen punt gemeen. We stellen daarom

$$\text{opp}(ABCD) = 2 \cdot \text{opp}(ABC) = \text{d}(C, \text{lijn } AB) \cdot AB .$$

Als *ABCD* een rechthoek is, dan $\text{d}(C, \text{lijn } AB) = BC$ en $\text{opp}(ABCD) = AB \cdot BC$ [*'lengte keer breedte'*]. In de figuur hieronder geldt $\sin\angle A = PD / AD$ ofwel $PD = AD \cdot \sin\angle A$, dus $\text{opp}(ABCD) = AB \cdot AD \cdot \sin\angle A$.



Ga na dat $\sin\angle A = \sin\angle B$. Met $\angle A$ en $\angle B$ is, zoals gebruikelijk, $\angle BAC$ resp. $\angle ABC$ bedoeld. Verder $AD = CD$, dus ook $\text{opp}(ABCD) = AB \cdot BC \cdot \sin\angle B$. Als *ABCD* een rechthoek is, dan $\sin\angle A = \sin\tfrac{1}{2}\pi = 1$ en $\text{opp}(ABCD) = AB \cdot AD$. Het parallellogram is ontaard, als de punten *A*, *B*, *C* en *D* op één lijn liggen. Dan $\sin\angle A = 0$ en $\text{opp}(ABCD) = 0$. Als we het over een parallellogram zonder meer hebben, dan bedoelen we altijd een niet-ontaard parallellogram.

8.7.1 Als *ABCD* een parallellogram is, dan

$$\text{opp}(ABCD) = 2 \cdot \text{opp}(ABC) = 2 \cdot \text{opp}(ABD) .$$

Volgens 7.5.5 geldt $\sin\angle A = \dfrac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|}{AB \cdot AD}$. Dus:

8.7.2 Als *ABCD* een parallellogram is, dan

$$\text{opp}(ABCD) = AB \cdot \text{d}(D, \text{lijn } AB) = AB \cdot AD \cdot \sin\angle A = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$$

8.7.2 geeft een meetkundige interpretatie aan het uitwendig product in $\mathbb{R}^3$. Als *ABCD* een parallellogram is, dan staat de pijl $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}$ loodrecht op de pijlen $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{AD}$, $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|$ = opp(*ABCD*) en verder geldt

$$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}) = |\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|^2$$

Als het parallellogram ontaard is, dan $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|^2 = 0$, dus $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AA}$. Als *ABCD* niet-ontaard is, dan $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|^2 > 0$ en het pijlendrietal $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})$ heeft een positieve oriëntatie. Het uitwendig product $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}$ is door deze eigenschappen eenduidig bepaald.

Bij de oppervlakte van een driehoek of een parallellogram gaat het in feite de oppervlakte van de binnengebieden van deze figuren. De oppervlakte is een maat voor de grootte van het binnengebied. De begrenzende zijden hebben een oppervlakte die gelijk is aan 0. We gebruiken de notatie $\text{parm}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ voor het door de pijlen $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{AC}$ opgespannen parallellogram samen met zijn binnengebied. Het vierde hoekpunt van het parallellogram is het eindpunt van de pijl $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Indien niet expliciet vermeld, gaan we er vanuit dat *A*, *B* en *C* niet op één lijn liggen.

Definitie. $\text{parm}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ is het door de pijlen $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{AC}$ opgespannen parallellogram samen met zijn binnengebied en bestaat uit de punten *X* zo dat

$$\overrightarrow{AX} = s\cdot\overrightarrow{AB} + t\cdot\overrightarrow{AC} \text{ met } 0\le s,t\le 1.$$

Als $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, dan is *ABDC* het begrenzende parallellogram en de punten *X* zo dat $\overrightarrow{AX} = s\cdot\overrightarrow{AB} + t\cdot\overrightarrow{AC}$ met $0<s,t<1$ vormen het binnengebied.

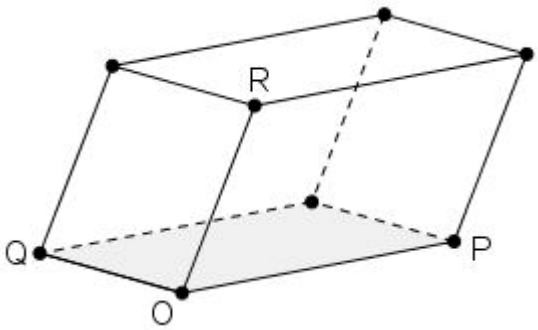
[Met deze notatie is parallellogram *ABCD* met zijn binnengebied te schrijven als $\text{parm}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ met $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.]

Definitie. Wordt een parallellogram *ABCD* door een translatie $\overrightarrow{AA'}$ afgebeeld op het parallellogram $A'B'C'D'$, dan vormen de hoekpunten van beide parallellogrammen de hoekpunten van het *parallellepipedum* $ABCDA'B'C'D'$, wanneer de parallellogrammen *ABCD* en $A'B'C'D'$ in twee verschillende vlakken *V* en *W* liggen. Het parallellepipedum heeft 6 parallellogrammen als *zijvlakken* en de 12 zijden van deze parallellogrammen heten de *ribben* van het blok. Zijn alle zijvlakken rechthoeken, dan noemen we $ABCDA'B'C'D'$ een *balk*. Een balk waarvan alle ribben even lang zijn heet een *kubus*.

Als we het hebben over de inhoud van een parallellepipedum, dan bedoelen we hoeveel er in past. De inhoud is een maat voor de grootte van het binnengebied, de inhoud van de begrenzende zijvlakken is gelijk aan 0. Het is de inhoud van het bijbehorende blok, dat bestaat uit het parallellepipedum samen met zijn binnengebied.

Het 3-dimensionaal analogon van parm($\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$) is het *door de pijlen* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{AD}$ *opgespannen blok*, dat we noteren als blok($\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$). Dit blok bestaat uit een door $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{AD}$ bepaald parallellepipedum samen met zijn binnengebied.

Definitie. Als de punten *A*, *B*, *C* en *D* niet in één vlak liggen, dan is blok($\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$) het *door de pijlen* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{AD}$ *opgespannen blok*. Dit blok bestaat uit de punten *X* zo dat $\overrightarrow{AX} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} + u\overrightarrow{AD}$ met $0 \le s,t,u \le 1$. De punten *binnen* het blok zijn de punten *X* zo dat $\overrightarrow{AX} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} + u\overrightarrow{AD}$ met $0 < s,t,u < 1$. De zijvlakken het blok zijn parallellogrammen, die een parallellepipedum vormen. De hoekpunten van het blok zijn de punten *X* zo dat $\overrightarrow{AX} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} + u\overrightarrow{AD}$ met *s*, *t* en *u* gelijk aan 0 of 1.



We bekijken eerst blok($\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}$) dat wordt opgespannen door de vectoren $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ en $\overrightarrow{OR}$. Het *grondvlak* is het parallellogram met de hoekpunten *O*, *P*, *Q* en $P+Q$. Punt *R* ligt niet in het grondvlak. Door de translatie $\overrightarrow{OR}$ gaat het grondvlak over in het *bovenvlak* met de hoekpunten *R*, $P+R$, $Q+R$ en $P+Q+R$. De andere zijvlakken noemen we dan de *opstaande zijvlakken*. [Welk zijvlak van een blok we het grondvlak noemen is natuurlijk een vrije keuze.] We rekenen de punten uit het binnengebied tot het blok. Een blok is een massief lichaam. Het blok($\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}$) bestaat uit de punten *X* zo dat $X = rP + sQ + tR$ met $0 \le r,s,t \le 1$. De *inhoud* van dit blok definiëren we d.m.v. *oppervlakte grondvlak maal hoogte*, waarin 'hoogte' de afstand tussen het grondvlak en het bijbehorende bovenvlak is.

Dus de inhoud van blok$(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ},\overrightarrow{OR})$ is gelijk aan $|\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}|\cdot \mathrm{d}(R,\text{vlak}\,OPQ)$ en volgens 8.2.7 geldt

$$\mathrm{d}(R,\text{ vlak }OPQ)=\frac{|\det(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ},\overrightarrow{OR})|}{|\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}|}.$$

Hiermee is aangetoond: de inhoud van blok$(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ},\overrightarrow{OR})$ is gelijk aan $|\det(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ},\overrightarrow{OR})|$ ofwel $|\det(P,Q,R)|$.

Op dezelfde manier kunnen we aantonen:

8.7.3 De inhoud van blok$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ is gelijk aan $|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})|$.

Toon ook aan dat:

8.7.4 De inhoud van blok$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ is gelijk aan

$$AB\cdot\mathrm{d}(C,\text{lijn }AB)\cdot\mathrm{d}(D,\text{vlak }ABC).$$

Uit het bovenstaande volgt:

8.7.5 De inhoud van een blok en de oppervlakte van een parallellogram veranderen niet onder congruentie van $\mathbb{R}^3$.

Toon aan:

8.7.6 Onder een affiene transformatie van $\mathbb{R}^3$ met lineair deel L wordt de inhoud van een blok vermenigvuldigd met $|\det(L)|$.

De lineaire transformatie $L=[P,Q,R]$ beeldt de *standaardkubus* blok(E_1,E_2,E_3) met inhoud $\det(E_1,E_2,E_3)=1$ af op blok(P,Q,R) met inhoud $|\det(P,Q,R)|$.

Opmerking. In blok$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ neemt punt A een speciale positie in. Als we de punten B, C en D onderling verwisselen blijft blok$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ dezelfde verzameling punten en ook de inhoud van het blok verandert dus niet. Daarentegen zijn bijvoorbeeld de puntenzamelingen blok$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ en blok$(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})$ i.h.a. niet hetzelfde, maar ze hebben wel altijd dezelfde inhoud. Ga na dat

$$\det(A-B,C-B,D-B)=-\det(B-A,C-A,D-A).$$

Merk op dat ook de puntenverzamelingen parm$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ en parm$(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$ i.h.a. niet hetzelfde zijn, maar dat ze wel altijd dezelfde oppervlakte hebben.

Definitie. Georiënteerd blok. Wanneer we volgorde van de pijlen $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{AD}$ in blok$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ van belang achten, dan kunnen we aan blok$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ een *georiënteerde inhoud* det$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ toekennen. We noemen dan de oriëntatie van het blok$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ positief, wanneer $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})>0$, en negatief, wanneer $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})<0$.

8.7.7 Onder een affiene transformatie van $\mathbb{R}^3$ met lineair deel *L* wordt de georiënteerde inhoud van een blok vermenigvuldigd met $\det(L)$.

We noemen twee blokken *niet-overlappend*, wanneer hun binnengebieden geen punten gemeen hebben. Bestaat een puntenverzameling uit een eindig aantal niet-overlappende blokken, dan is de inhoud van die puntenverzameling gelijk aan de som van de inhouden van deze blokken. Dit geldt i.h.b. voor kubussen. Dit kan de basis zijn voor de definitie en berekening van de inhoud van begrensde deelverzameling *V* van $\mathbb{R}^3$. Begin met een kubus die *V* omvat. Splits deze kubus op in groot aantal veel kleinere congruente en niet-overlappende kubusjes met een inhoud *k*. Neem aan dat het aantal kleine kubusjes dat alleen maar punten van *V* bevat gelijk is aan *a*. Neem aan dat het aantal kleine kubusjes dat minstens één punt van *V* bevat gelijk is aan *b*. Als *V* inderdaad een inhoud heeft, dan moet dit een getal zijn zo $a\cdot k \le \text{inhoud}(V) \le b\cdot k$. Soortgelijk voor oppervlakte in $\mathbb{R}^2$ (of in een vlak *V* in $\mathbb{R}^3$) met vierkantjes i.p.v. kubussen.

Toon aan:

8.7.8 Een affiene $\mathbb{R}^2$-$\mathbb{R}^3$-transformatie $\varphi(X)=L(X)+R$ met lineair deel $L[P,Q]$ is een 1-1-afbeelding van $\mathbb{R}^2$ op een vlak *V* in $\mathbb{R}^3$. Hierbij gaan parallellogrammen in $\mathbb{R}^2$ over in parallellogrammen in *V*. Als parallellogram *ABCD* in $\mathbb{R}^2$ onder φ overgaat in parallellogram $A'B'C'D'$ in *V*, dan $\text{opp}(A'B'C'D')=|P\times Q|\cdot\text{opp}(ABCD)$.

Opmerking. $|P\times Q|=\sqrt{|P|^2\cdot|Q|^2-(P\cdot Q)^2}$, dus $|P\times Q|=|P|\cdot|Q| \Leftrightarrow P\cdot Q=0$. Een lineaire $\mathbb{R}^2$-$\mathbb{R}^3$-afbeelding heeft geen determinant.

8.8 De inhoud van een simplex.

Is *ABCD* een viervlak, dan liggen volgens afspraak de punten *A, B, C* en *D* niet in één vlak. Volgens 7.2.5 bestaat het viervlak *ABCD* samen met zijn binnengebied uit de punten $X \in \mathbb{R}^3$ zo dat $X = rA + sB + tC + uD$ met $r,s,t,u \geq 0$ en $r+s+t+u = 1$. Een viervlak samen met zijn binnengebied wordt ook een 3-*dimensionaal simplex* genoemd. [Een driehoek *ABC* met zijn binnengebied is dan een *2-dimensionaal simplex* en een lijnstuk *AB* is een *1-dimensionaal simplex*.] Met een simplex zonder meer bedoelen we hier steeds een 3-dimensionaal simplex.

Stel $X = rA + sB + tC + uD$ met $r,s,t,u \geq 0$ en $r+s+t+u = 1$. Dan $0 \leq r,s,t,u \leq 1$ en $s+t+u = 1-r$. Verder $X = (1-s-t-u)A + sB + tC + uD$ ofwel

$$X - A = s(B-A) + t(C-A) + u(D-A) \text{ met } s,t,u \geq 0 \text{ en } s+t+u \leq 1.$$

Hieruit volgt:

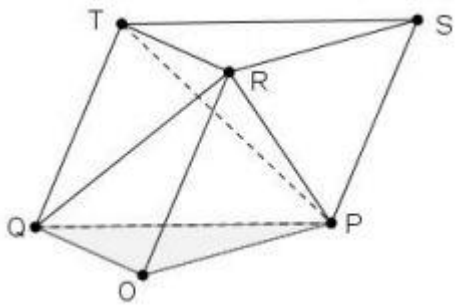
8.8.1 Simplex *ABCD* bestaat uit de punten *X* zo dat

$$\overrightarrow{AX} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} + u\overrightarrow{AD} \text{ met } s,t,u \geq 0 \text{ en } s+t+u \leq 1.$$

We noteren simplex *ABCD* dan ook als simplex$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

Opgave. In simplex$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ lijkt hoekpunt *A* een speciale rol te hebben. Ga na dat dit slechts schijn is en dat bijv. simplex$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ = simplex$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})$.

De punten van simplex$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ vormen een deelverzameling van de punten van blok$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$. We gaan na dat in blok$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ zonder overlap precies 6 simplexen passen, die weliswaar niet congruent zijn, maar die wel elk dezelfde inhoud hebben als simplex$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$, wanneer we stellen dat twee simplexen dezelfde inhoud hebben, wanneer hun grondvlakken dezelfde oppervlakte hebben en ook de bijbehorende hoogten even groot zijn [waarbij het niet uitmaakt welke van de vier zijvlakken we als grondvlak nemen]. We bekijken hiertoe, zonder de algemeenheid tekort te doen, simplex$(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR})$ en blok$(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR})$.



Diagonaalvlak *PQTS* verdeelt blok$(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR})$ in twee congruente driezijdige prisma's met dezelfde inhoud [een blok is puntsymmetrisch].

Het prisma met grondvlak *OPQ* en bovenvlak *RST* kunnen we vervolgens opsplitsen in de drie simplexen *OPQR*, *RSTP* en *QRTP*. Ga na dat deze simplexen volgens bovenstaande definitie alle drie dezelfde inhoud hebben. Dit rechtvaardigt dat we nu de inhoud van simplex *OPQR* definiëren als

$$\tfrac{1}{6}\cdot|\det(P,Q,R)|.$$

Algemener:

Definitie. De inhoud van $\text{simplex}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ is gelijk aan $\tfrac{1}{6}\cdot|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})|$.

Toon aan:

8.8.2 De inhoud van $\text{simplex}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ is gelijk aan $\tfrac{1}{3}\times\text{opp(grondvlak)}\times\text{hoogte}$.

[Bijv. $\tfrac{1}{3}\cdot\text{opp}(BCD)\cdot d(A,\text{vlak}\,BCD)$.]

Opmerking. Wanneer we volgorde van de pijlen $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{AD}$ van belang achten kunnen we aan $\text{simplex}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ een *georiënteerde inhoud* $\tfrac{1}{6}\cdot\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ toekennen.

Inhoud piramide of prisma. Een viervlak is ook een driezijdige piramide. Een convexe *n*-hoek vormt het grondvlak van een *n-zijdig prisma* of van een *n-zijdige piramide*. Zulke lichamen kunnen worden opgesplitst in niet-overlappende simplexen. Twee simplexen overlappen elkaar niet, als hun binnengebieden geen punt gemeen hebben. Ga na dat de inhoud van een n-zijdig prisma gelijk is aan

oppervlakte grondvlak × *bijbehorende hoogte*.

De inhoud van een n-zijdige piramide is gelijk aan

$\tfrac{1}{3}\times$ *oppervlakte grondvlak* × *bijbehorende hoogte*.

[Dat het grondvlak convex is, is niet echt nodig. Voldoende is dat we het grondvlak in niet-overlappende driehoeken kunnen opsplitsen. Dat kan meestal op meerdere manieren. Strikt genomen moet ook nog bewezen worden dat de inhoud van het prisma of de piramide niet afhangt van de manier waarop dit gebeurt.]

De hoofdstukken 9 t/m 14 ontbreken in deze korte versie.

Literatuur

[1] J.M. Aarts, Meetkunde, Epsilon Uitgaven.

[2] Frank Ayres, Elliott Mendelson, Calculus, Schaum's Outlines.

[3] David F. Belding, Kevin J. Mitchel, Foundations of Analysis, Dover

[4] Richard Courant, Harold Robbins, What is Mathematics, Oxford University Press.

[5] G.W. Decnop, H. van Iperen, R. Martini, dictaat Lineaire Algebra, Delftse Uitgevers Maatschappij.

[6] Seán Dineen, Multivariate Calculus and Geometrie, Springer.

[7] Clayton W. Dodge, Euclidean Geometry and Transformations, Dover.

[8] Roger Fenn, Geometry, Springer.

[9] Audun Holme, Geometry Our Cultural Heritage, Springer.

[10] N.C Keemink, P. Thiel, Samengevat VWO Wiskunde B, ThiemeMeulenhoff.

[11] Martin Kindt, Lessen in Projectieve Meetkunde, Epsilon Uitgaven.

[12] Eli Maor, Trigometric Delights, Princeton University Press.

[13] Miles Reid, Balázs Szendröi, Geometry and Topology, Cambridge University Press.

[14] John Roe, Elementary Geometry, Oxford University Press.

[15] Harald Scheid, Wolfgang Schwarz, Elemente der Geometrie, Spektrum Akademischer Verlag.

[16] John Stillwell, The Four Pillars Of Geometry, Springer.

Andere boeken van Rinse Poortinga:

[17] Analyse + Meetkunde, *op de lijn en in het vlak*,

[18] Lineaire Algebra en Voortgezette Analyse,

[19] Meetkunde en Algebra, *van een projectief naar een euclidisch vlak*.

Website: www.rinsepoortinga.nl

Index

A

aangeschreven cirkel 3.1
affiene afbeelding 1.2; 4.5; 7.2
affiene classificatie van kegelsneden 6.7
affiene combinatie 7.3; 12.1
affiene deelruimte 7.1
affiene eigenschap 1.3; 6.4; 12.2
affien equivalent 1.3; 12.2
affiene parametervoorstelling 8.5
affiene transformatie 1.2; 4.5; 6.1; 12.2
afgelegde afstand 13.4
afgeleide 13.2
afstand 2.1; 2.2; 7.5; 8.2
antiparallelle richtcirkels 9.6
Apollonius (cirkel van) 4.2
as van een homologie 6.2
as van een kegelsnede 12.4
asymptoot van hyperbool 5.3; 6.6; 9.5

B

balk 8.7
basispunten 10.1
basispunten van een kegelsnedenbundel 11.2
beeldruimte 7.1
beperking van een afbeelding 7.3
beschrijvenden van een kegel 9.5
beweging 13.4
bilineaire functie 7.6
binnengebied 2.3
bissectrice 3.1
blok 8.7
bol 8.2
brandpunt 12.5
Brianchon 11.7

C

Cauchy-Schwarz (ongelijkheid van) 2.1; 7.5
centrale collineatie 6.2
centrale projectie 4.1; 9.2
centrum 6.2; 9.2; 9.4
Ceva 1.5; 10.6
cilinder 9.5
cirkel 12.5
cirkelboog 3.6
coëfficiëntendeterminant 7.1
coëfficiëntenmatrix 11.5; 12.5
coëfficiëntenverhouding 10.1
collineair 10.1
complement van een hoek 3.1
componenten van een afbeelding 7.6; 13.4
concentrisch 3.8; 9.7
concurrent 10.1
congruent 2.1; 8.3; 12.2
congruentie 2.1; 3.4; 8.3
constante functie 13.2
continu 13.2
continu differentieerbaar 13.3
construeerbare getallen 13.1
construeerbaar vlak 13.1
coördinaat as 7.0
coördinatenverhouding 9.8; 10.1
coördinaatvlak 7.0
cosinus 3.1; 7.5; 13.5
cosinusregel 3.1
Kramer (regel van) 1.1; 7.1

D

dalende functie 13.2
decimale breuk 13.1
deellichaam van $\mathbb{R}$ 13.1
definiet positief 7.6
dekpunt 2.4; 6.2
Desargues 1.4; 4.2; 10.2
determinant 1.1; 7.1
diagonaalpunt 4.2; 10.7
diagonaal van een volledige vierhoek 4.2; 10.7
diagonaalvlak 8.8
diameter van een cirkel, bol 2.2; 8.2
differentieerbaar 13.2
dilatatie 1.4; 8.4
dimensie deelruimte 7.1
directe congruentie 8.3
drager (van lijnstuk, pijl, etc.) 7.3
driehoeksongelijkheid 2.1
duale 10.5
duale kegelsnede 11.7
dualiseren 10.5
dualiteit 10.6

dubbelverhouding 10.4; 10.5
dubbelverhouding bij inversie 4.6
dubbelverhouding op een lijn 10.4
dubbelverhouding op een kegelsnede 5.4; 11.2
dubbelverhouding van een homologie 6.3

E

eenheidscirkel 6.7
eenheidspunt 10.1
elatie 6.3
elementaire meetkunde 13.1
ellips 5.1; 9.5; 12.5
euclidisch lichaam 13.1
Euler (lijn van) 2.2
evenwijdig 7.3
evenwijdigheid van cirkels 9.5
evenwijdige lijnen, vlakken 1.3; 7.3

G

Gauss-eliminatie 7.1
gehele getallen 13.2
geïnduceerde projectieve afbeelding 10.3; 12.5
genormeerde representanten 10.1
gelijkbenige driehoek 3.1
gelijkvormig 2.1; 8.2 ; 12.2
gelijkvormigheid 2.1; 8.2; 12.2
gelijkvormigheidsfactor 8.2; 12.2
gelijkzijdige driehoek 3.1
gemiddelde functiewaarde 13.8
gemiddelde snelheid 13.4
georiënteerde hoek 3.2; 3.5; 8.1
gespiegelde congruentie 8.3
gestrekte hoek 3.1; 7.5
getransponeerde matrix of lineaire afbeelding 7.1
gewone lijn 9.4
gewoon punt 9.4; 12.1
goniometrische formules 3.3
goniometrische functies 13.5

H

halfruimte 8.1
halfvlak 2.3
halve lijn 3.1
harmonisch scheiden 4.2; 10.7
herhaalde integralen 14.1
Heron (formule van) 3.1
hoek (georiënteerde) 3.1; 3.2; 7.5
hoekmaat (in radialen) 13.6
hoek tussen lijnen 3.1; 7.5
hoek tussen lijn en vlak 7.5
hoek tussen vlakken 7.5
Holgate 11.8
homogene coördinaten 9.8
homogene kwadratische functie 7.6; 11.5
homogene kwadratische vergelijking 11.1
homologie 6.3
hoofddiagonaal van een matrix 7.1; 7.6
hoogtelijn 2.2
hoogtepunt van driehoek 2.2
hyperbool 5.1; 9.5; 12.5
hypotenusa 3.1

I

identieke transformatie 1.1; 7.1
ingeschreven cirkel 3.1
inhoud 8.7 ; 14.1
inproduct 2.1; 7.4
integraal 13.3
integrand 13.3
integratievariabele 13.3
integreerbaar 13.3
integreren 13.3
interval (open, gesloten) 13.2
invariante lijn 2.4; 6.2
invariant punt 2.4
invariant vlak 7.3
inverse afbeelding 1.1; 7.1
inversie t.o.v. cirkel of bol 3.9 ; 9.7
inversie van een vlak 9.6
involutie 5.5; 6.2
involutiestelling van Desargues 6.5
inwendig product 2.1; 7.4
inwendig punt 13.2
isometrie 2.4; 8.3; 12.2
isometrische parametervoorstelling 8.5

K
$\mathbb{K}$ (de construeerbare getallen) 13.1
kegel 9.5
kegelsnede 5.1; 9.5; 11.1
kegelsnede (ontaard, niet-ontaard) 5.1; 11.1
kegelsnede (parametrisering) 5.1
kegelsnede (vergelijking) 5.1; 11.1
kegelsnedenbundel 11.2
koordenvierhoek 3.7
kromme 13.4
kruisende lijnen 7,3
kubus 8.7
kurkentrekkerregel 8.1
kwadriek 12.5

L
lengte van een cirkelboog 13.6
lengte van lijnstuk 2.1; 7.5
lichaam 13.1
lijn 1.3
lijnenwaaier 4.1
lijnenkegelsnede
lijnenwaaier 10.1
lijnspiegeling 8.6
lijnstuk 1.3
lijnstuk intern, extern verdelen 4.2
lineair (on-)afhankelijk 1.1; 7.1
lineaire afbeelding 1.1; 7.1
lineaire (deel)ruimte 7.1
lineair in al zijn variabelen 7.6
lineaire ruimte 1.2
lineaire transformatie 1.1
lokale oppervlaktefactor 14.3; 14.4
lokale volumefactor 14.4
loodlijn 2.2 ; 7.4
loodrecht 2.1; 7.4
loodrechte projectie 7.4; 9.1

M
machtlijn 3.8
macht van punt t.o.v. cirkel of bol 3.8; 9.7
machtvlak 9.7
matrix 7.1
maximum van een functie 13.2
Menelaus 1.5; 10.6
metrische eigenschap 12.2
middellijn 2.2; 6.6; 8.2; 12.4
middelloodlijn 2.2
middelloodvlak 8.2
middelwaardestelling 13.2; 13.3
middenparallel 1.5
middelpunt 2.2; 6.6; 8.2; 8.6; 12.4
middelpuntshoek 3.6
midden van een lijnstuk 1.3
minimum van een functie 13.2
multilineaire functie 7.6
Miquel 3.6

N
$\mathbb{N}=\{0,1,2,3,...\}$ 13.2
natuurlijke getallen 13.2
negenpuntscirkel 3.7
negenpuntskegelsnede 11.8
n-hoek 2.1
normaal van een lijn 2.1
normaal van een vlak 7.4
normaalvector 7.4
normeringsstelling 10.1; 12.5
nulvector 1.2
n-zijdige piramide 8.8
n-zijdig prisma 8.8

O
omgeschreven cirkel, bol 2.2; 8.2
omkeerbare afbeelding 1.1; 7.1
omtrekshoek 3.6
omwentelingslichaam 14.1
ondergroep 1.2
oneindig ver punt ; 4.5; 9.4; 12.1
oneindig verre lijn 4.5; 9.4; 12.1
oneindig ver vlak 9.4
oppervlak 13.12
oppervlakte (georiënteerde) 2.3; 8.7
optellen modulo 2π 13.6
oriëntatie 3.2; 8.1

P
π (het getal pi) 13.5
Pappus 1.4; 11.4
pappuslijn 4.4;
parabool 5.1; 9.5; 12.5
parallellogram 1.2
parallellepipedum 8.7
parallelprojectie 4.1; 4.5; 9.1

parameterinterval 13.4
parameterverhouding 10.1; 12.5
parametervoorstelling van een lijn, vlak, kegelsnede, kromme 1.3; 7.3; 11.3; 13.4;14.3
Pascal 4.3; 4.4; 5.4; 11.4
pascallijn 4.3; 5.4; 11.4
periode 13.5
periodieke functie 13.5
perspectiviteit 6.1; 9.4; 10.6
perspectiviteitsas 10.6
pijl 1.2; 7.2
pijlenruimte 1.2
piramide 7.3
pool 6.6; 11.6
pooldriehoek 6.6; 11.6
poolinvolutie 11.6; 12.3
poollijn 6.6; 11.6; 12.3
pool van een involutie 6.3
poollijn van een involutie 6.3
poolverwant 6.6; 11.6
poolverwante middellijnen 12.4
primitieve 13.3
primitiveren 13.3
prisma 7.3
projecteren en snijden 4.1
projecterende kegel 9.5
projecterende lijn 9.1; 9.2
projecterend vlak 9.1; 9.2
projectie van een punt op een lijn of een vlak 2.2
projectie van een vlak op een vlak 9.3
projectieve eigenschap 6.4; 12.2
projectief equivalent 6.4; 10.6; 11.1; 12.2
projectief vlak 6.1; 10.1; 12.5
projectievlak 9.1; 9.2
projectieve basis 12.5
projectieve getallenlijn 4.5; 10.3
projectieve lijn, lijnenwaaier 6.1
projectieve transformatie 6.1; 10.3; 12.2
projectiviteit 4.5; 5.1; 9.4; 10.4; 10.5; 11.2
projectiviteitsas 5.5; 10.6
Ptolemaeus (stelling van) 3.7; 3.9
puntenwaaier 10.6
puntenkegelsnede 11.7
puntsgewijs invariant 2.4; 6.2; 7.3
puntspiegeling 3.5; 8.4
Pythagoras (stelling van) 2.2; 8.2

Q

$\mathbb{Q}$ (de rationale getallen) 13.1

R

$\mathbb{R}$ (de reële getallen)
raakkegel 9.7
raaklijn 2.2; 5.3; 6.6; 8.2; 11.1; 11.6; 12.3; 12.5; 13.12
raaklijnenkegelsnede 11.7
raakpunt 2.2; 5.3; 8.2
raakpuntenkegelsnede 11.7
raakvlak 8.2; 13.12; 14.3; 14.4
radiaal 13.6
randpunt 13.2
rang (dimensie beeldruimte) 7.1
rechte hoek 3.1; 7.5
rechte kegel 9.5
rechthoekige driehoek 2.2
rechthoekszijde 3.1
repeterende decimale breuk 13.1
representant 9.8; 10.1; 12.5
ribbe 8.2; 8.7
richtcirkel van een kegel 9.5
richtingscoëfficiënt 1.3
richtingslijn (-vlak, -ruimte) 2.1
richtingsvector 2.1; 7.3
richtlijn 12.5
rij 13.2
rotatie 8.6
rotatiehoek 8.6
ruimtelijke figuur 8.5

S

scheiden (van puntenparen) 4.2; 10.7
scherpe hoek 3.1; 7.5
scheve kegel 9.5
schroefbeweging 8.6
schroefdopregel 8.1
schuifspiegeling 2.4; 8.4
schuine zijde 3.1
sector 3.1; 13.7
simplex 8.8
sinus 3.1; 7.5; 13.5
sinusregel 3.1

snelheid 13.4
snelheidsvector 13.4
snijden in een oneindig ver punt 4.2
snijdende lijnen 7.3
snijlijn van vlakken 7.3
somformule 13.5
som van hoeken 3.1; 3.2
spiegelas 2.4
spiegelen 2.4; 8.4; 8.6
spiegelvlak 8.4
standaardbasis 1.1
standaardkegelsnede 6.7
Steiner (constructie van) 4.5; 10.6
Steiner (definitie kegelsnede) 11.2
stereografische projectie 9.6
stervormig gebied 13.9
steunvector 2.1; 7.3
stijgende functie 13.2
stompe hoek 3.1; 7.5
straal van cirkel, bol 2.2; 8.2
strikt dalende functie 13.2
strikt stijgende functie 13.2
stuksgewijs continu differentieerbaar 13.4
supplement van een hoek 3.1
symmetrie 8.6
symmetrieas 2.4; 8.6; 9.5
symmetriegroep van een figuur 8.6
symmetrievlak 8.6; 9.5
symmetrische bilineaire functie 7.6
symmetrische matrix, lineaire afbeelding 7.6; 11.5

T
takken van een hyperbool 9.5
tangens 3.3; 7.5
tetraëder 7.3
Thales (stelling van) 2.2
top van een kegel 9.5
top van een lijnenwaaier 4.1
transformatie 1.1; 1.3; 7.1
transformatiegroep 1.1; 1.2; 7.1
translatie 1.2; 7.2
transponeren 7.1; 7.6
trapvorm 7.1

U
uitwendig product 7.3

V
vector 1.2
verdwijnlijn 9.3
vergelijking van een vlak 7.3
verhouding van punten op een lijn 1.4
vermenigvuldiging t.o.v. een punt 8.4
viervlak 7.3; 8.1
vlakke figuur 8.5
vluchtpunt 9.2; 9.3
vluchtlijn 9.3
voetpuntsdriehoek 3.7
volledige vierhoek 4.2; 10.7; 11.1

W
Wallace (lijn van) 3.7

Z
$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ 13.2
zeshoek 5.2
zijvlak 8.2; 8.7
zwaartelijnen 1.5; 8.2
zwaartepunt 1.5; 8.2

Elementaire Meetkunde

Dit boek behandelt in de eerste twaalf hoofdstukken de vlakke meetkunde in $\mathbb{R}^2$ en de ruimtemeetkunde in $\mathbb{R}^3$ met behulp van eenvoudige lineaire algebra. Van de reële getallen hebben we alleen de meest elementaire eigenschappen nodig: dat zijn de rekenregels met betrekking tot optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en het feit dat we uit een positief getal de wortel kunnen trekken. Speciale aandacht wordt besteed aan het uitbreiden van $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ met oneindig verre punten tot een projectief vlak resp. projectieve ruimte. In de laatste twee hoofdstukken schetsen we wat er meer mogelijk is, wanneer we gebruik mogen maken van differentiëren en integreren. We hebben dan de volledige kracht van de reële getallen nodig.

We richten ons tot lezers die op school wiskunde B in hun vakkenpakket hadden en daarna wiskunde of een ander exact vak zijn gaan studeren.

Inhoud:

1. Het vlak $\mathbb{R}^2$
2. Gelijkvormigheid en congruentie
3. Hoeken
4. Projectie en dubbelverhouding
5. Kegelsneden en de stelling van Pascal
6. Projectieve transformaties
7. Meetkunde in $\mathbb{R}^3$
8. Oriëntatie en isometrieën
9. Projecties
10. Projectieve vlakke meetkunde
11. Kegelsneden in het projectieve vlak
12. Oneindig verre punten
13. Meetkunde met Analyse in $\mathbb{R}^2$
14. Inhoud en oppervlakte in $\mathbb{R}^3$

http://www.rinsepoortinga.nl