Meetkunde en Algebra

Een korte beschrijving van de inhoud

Lineaire algebra maakt een betrekkelijk eenvoudige behandeling van de meetkunde in een vlak of de ruimte mogelijk. Omgekeerd illustreren meetkundige toepassingen op een beeldende manier de algebraïsche eigenschappen van een lineaire ruimte. De algebraïsche aanpak is gemakkelijk te generaliseren tot ruimten met een dimensie groter dan 3 of zelfs tot ruimten van oneindige dimensie. Een punt X in een lineaire ruimte met dimensie n kunnen we representeren door een n-tal $(x_1,...,x_n)$. We kunnen doen alsof de coördinaten $x_1,...,x_n$ reëele getallen zijn, maar al spoedig blijkt het in eerste instantie voldoende om te veronderstellen dat $x_1,...,x_n$ tot een *lichaam* behoren. Specifieke eigenschappen van de reëele getallen hebben we voorlopig niet nodig. De wiskundige term 'lichaam' wordt gebruikt voor een algebraïsche structuur, waarin optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen geschiedt volgens dezelfde rekenregels die ook gelden voor de reëele getallen. In hoofdstuk 14 wordt uitgelegd wat precies een lichaam is. Bekende lichamen zijn $\mathbb{Q}$ (de rationale getallen), $\mathbb{R}$ (de reëele getallen) en $\mathbb{C}$ (de complexe getallen). Deze lichamen hebben heel verschillende eigenschappen. $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ zijn geordende lichamen, maar in $\mathbb{R}$ is ieder positief getal een kwadraat en dat is in $\mathbb{Q}$ niet het geval. In $\mathbb{C}$ is ieder getal een kwadraat, maar $\mathbb{C}$ is niet een geordend lichaam. Zo zijn er veel meer verschillen op te noemen, maar m.b.t. optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen gedragen rationale, reëele en complexe getallen zich gelijk.

Een willekeurig lichaam duiden we aan met $\mathbb{F}$. [*'Field'* is de Engelse term voor een lichaam.] Het is interessant om te zien welke algebraïsche eigenschappen van het gebruikte lichaam $\mathbb{F}$ verantwoordelijk zijn voor welke meetkundige eigenschappen. Er bestaan zelfs lichamen met een eindig aantal elementen. De eerste vijf hoofdstukken van dit boek vormen een inleiding in de meetkunde van een projectief vlak. Deze meetkunde is heel goed te behandelen, wanneer we over het grondlichaam $\mathbb{F}$ buiten de lichaamseigenschappen niets speciaals veronderstellen. In een projectief vlak hebben twee verschillende lijnen precies één snijpunt. Dat maakt dat stellingen veel algemener geformuleerd en bewezen kunnen worden dan in de 'gewone' vlakke meetkunde, waar we rekening moeten houden met het speciale geval dat lijnen evenwijdig zijn. Bovendien krijgen we bij iedere stelling de *duale stelling* cadeau. De duale stelling wordt bewezen door het bewijs van de oorspronkelijke stelling te dualiseren. Bij dualiseren worden de begrippen punt en lijn verwisseld en de bewering dat een punt op een lijn ligt gaat over in de bewering dat een lijn door een punt gaat. Het begrip verbindingslijn van twee verschillende punten staat duaal tegenover het begrip snijpunt van twee verschillende lijnen. Een punt P in het projectieve vlak wordt gerepresenteerd door zijn *homogeen* coördinatendrietal $(p_1 : p_2 : p_3)$. Het woord homogeen en de notatie met de dubbele punt geven aan dat alleen de *verhouding* van de coördinaten van belang is. Een lijn in het projectieve vlak bestaat uit de punten in het vlak, waarvan de coördinatenverhouding $(x_1 : x_2 : x_3)$ voldoet aan een homogene lineaire vergelijking $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$. Deze lijn wordt aangeduid door zijn coëfficiëntenverhouding $[a_1 : a_2 : a_3]$.

De dualiteit van het projectieve vlak gaat verloren, wanneer we in hoofdstuk 6 één bepaalde lijn uitkiezen en die lijn de *oneindig verre lijn* noemen. De punten op deze lijn zijn dan de *oneindig verre punten*. Met behulp van oneindig verre punten kunnen we het begrip *evenwijdig* invoeren: twee lijnen zijn evenwijdig, wanneer ze elkaar in een oneindig ver punt snijden. Het wordt dan mogelijk om verhoudingen van 3 punten op een lijn te definiëren, lengtes spelen hierbij nog geen rol. Bovendien kunnen we nu 3 soorten niet-ontaarde *kegelsneden* onderscheiden d.m.v. het aantal oneindig verre punten dat ze bevatten: een ellips, parabool en hyperbool bevat 0, 1 resp. 2 oneindig verre punten. De projectieve transformaties die de oneindig verre lijn op zichzelf afbeelden zijn de *affiene transformaties*. In hoofdstuk 7 verwijderen we de oneindig verre lijn uit het projectieve vlak en houden het *affiene vlak* over. Het affiene vlak kunnen we identificeren met $\mathbb{F}^2$. De meetkunde in $\mathbb{F}^2$ gaat al een beetje lijken op de meetkunde in $\mathbb{R}^2$ die we op school hebben leren kennen. Om afstanden en hoeken in het vlak $\mathbb{F}^2$ te kunnen definiëren moeten we eerst hogere eisen aan het grondlichaam $\mathbb{F}$ stellen. In hoofdstuk 8 bekijken we wat we kunnen doen, wanneer we eisen dat $\mathbb{F}$ een *geordend lichaam* is. Dat maakt het bijv. mogelijk om lijnstukken en halve lijnen te definiëren. Ook het begrip *loodrecht* kan gedefinieerd worden. Er wordt onderzocht welke transformaties van het affiene vlak de loodrechte stand intact laten.

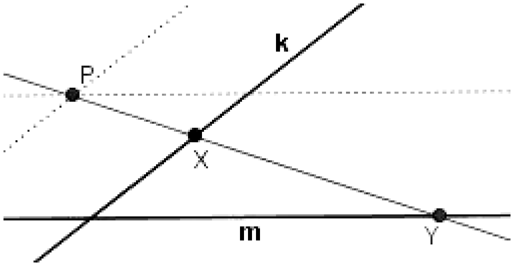
In hoofdstuk 9 nemen we een *euclidisch lichaam* $\mathbb{F}$ als grondlichaam, d.w.z. een geordend lichaam, waarin ieder positief getal een kwadraat is. Dat maakt $\mathbb{F}^2$ tot een *euclidisch vlak*, waarin we de *euclidische afstand* van twee punten kunnen definiëren op een manier die in overeenstemming is met de stelling van Pythagoras. Het standaard *inproduct* van $\mathbb{F}^2$ krijgt nu de bekende eigenschappen. Verder kunnen we *hoeken* definiëren en ook de *sinus*, *cosinus* en *tangens* van deze hoeken. We beschikken echter nog niet over een hoekmaat. In hoofdstuk 10 bekijken enkele bekende toepassingen met afstanden en hoeken in een euclidisch vlak, o.a. met betrekking tot omtrekshoeken in een cirkel. In hoofdstuk 11 onderzoeken we het verband tussen het kleinste euclidische deellichaam $\mathbb{K}$ van $\mathbb{R}$ en constructies met passer en liniaal. $\mathbb{K}$ is het lichaam van de *construeerbare reële getallen*.

De eerste elf hoofdstukken behandelen de overgang van een projectief vlak naar een euclidisch vlak, precies wat de ondertitel van dit boek belooft. In hoofdstuk 12 nemen we het lichaam $\mathbb{R}$ van de reële getallen als grondlichaam. Dan hoeven we ons niet meer te beperken tot algebraïsche methoden, maar staan alle middelen van de analyse ter beschikking. We kunnen dan een *hoekmaat* invoeren.

De hoofdstukken 13 t/m 18 geven een overzicht van de algebra die nodig is bij het bestuderen van meetkunde met behulp van algebraïsche methoden. Met name hoofdstuk 15 over lineaire algebra is van belang. Dit overzicht is niet bedoeld als een eerste inleiding. We nemen aan dat de lezer al eerder kennis gemaakt met de eerste beginselen van deze stof. In hoofdstuk 16 wordt in het kort de projectieve meetkunde in hogere dimensies behandeld.

Inhoud

1 Een projectief vlak



1.1 Inleiding. Stel k en m zijn twee lijnen in een vlak die niet door punt P gaan. Lijnen door P die niet evenwijdig zijn met k en ook niet met m snijden lijn k in een punt X en lijn m in een punt Y. Dat geeft een afbeelding $X \mapsto Y$ van punten op k naar punten op m. Deze afbeelding is een 1-1 -correspondentie tussen k en m, wanneer $k \parallel m$ (k evenwijdig m). Zijn k en m niet evenwijdig, dan is er een punt X op k zo dat $PX \parallel m$ en X heeft dan geen beeld Y op m. Ook is er dan een punt Y op m zo dat $PY \parallel k$ en Y is dan niet het beeld van een punt X op k. Genoemde punten zijn lastige uitzonderingen bij de projectie van lijn k vanuit P op lijn m. Daarom is het handig om bij de meetkunde in een plat vlak over te gaan op een spraakgebruik, waarbij we zeggen dat evenwijdige lijnen elkaar in een 'oneindig ver punt' snijden. Daartoe denken we ons aan iedere lijn in het vlak één *oneindig ver punt* toegevoegd. Tegelijk zeggen we dat alle oneindig verre punten van het vlak de *oneindig verre lijn* van dit vlak vormen. Nu kunnen we zeggen dat twee verschillende lijnen altijd één snijpunt hebben. Of dat snijpunt een gewoon punt of een oneindig ver punt laten in het midden. Evenwijdige lijnen gaan door hetzelfde oneindige verre punt. In veel meetkundige beweringen hoeven we nu het onderscheid tussen evenwijdige lijnen en snijdende lijnen niet meer te maken. Dat geldt ook voor het onderscheid tussen centrale projectie en parallelprojectie. Bij centrale projectie gaan alle projecterende lijnen door één punt P, bij parallelprojectie zijn de projecterende lijnen evenwijdig en gaan dus door hetzelfde oneindig verre punt P. Bovendien geldt nu zonder uitzondering dat door twee verschillende punten A en B precies één lijn $k = AB$ gaat. Dat was al zo, wanneer A en B twee gewone punten zijn, maar het klopt ook als A of B (of beide) oneindig verre punten zijn. Is A een gewoon punt en B een oneindig ver punt, dan zijn alle lijnen door B evenwijdig en k is de enige van deze evenwijdige lijnen die door punt A gaat. Zijn A en B allebei oneindig verre punten, dan is lijn k de oneindig verre lijn. Het hierboven ingevoerde spraakgebruik heeft het voordeel dat we bepaalde stellingen algemener kunnen *formuleren*. Denk bijv. aan de stellingen van Pappus, Pascal of Desargues, die ook blijven gelden wanneer bepaalde lijnen evenwijdig zijn. Een nadeel blijft wel dat we bij het *bewijzen* van zulke stellingen die speciale gevallen nog steeds apart moeten behandelen.

Om dat probleem op te lossen kunnen we niet volstaan met de aanpassing van ons spraakgebruik, maar moeten we overstappen op een andere manier van meetkunde bedrijven, waarbij we een vlak niet alleen in gedachten uitbreiden met oneindig verre punten, maar waarbij we daadwerkelijk overstappen naar een *projectief vlak*, waarin twee verschillende lijnen steeds één snijpunt hebben en waarin het bij bewijzen niet van belang of zo'n snijpunt een gewoon of een oneindig ver punt is. We stappen dan over op een vorm van *projectieve vlakke meetkunde*, waarin de meetkundige figuren in eerste instantie bestaan uit lijnen en punten. Later komen hier nog de kegelsneden bij. Van deze figuren bekijken we die eigenschappen die behouden blijven onder projecties van een lijn op een lijn of van een vlak op een vlak.

1.2 Homogene coördinaten. We nemen aan dat de lezer bekend is met de meetkunde in het vlak $\mathbb{R}^2$, waarin elk punt gegeven wordt door zijn coördinatenpaar (x, y). Een bekende manier om $\mathbb{R}^2$ met oneindig verre punten uit te breiden tot een projectief vlak is het invoeren van *homogene coördinaten*. We beginnen met de verzameling $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ die bestaat uit alle drietallen (x, y, z) met $x, y, z \in \mathbb{R}$ en x, y en z niet alle drie gelijk aan 0. Als $z \neq 0$, dan noemen we het drietal (x, y, z) uit $\mathbb{R}^3$ een stel *homogene coördinaten* van het punt $\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$ uit $\mathbb{R}^2$. In het bijzonder is $(x, y, 1)$ een stel homogene coördinaten van punt (x, y), maar dat geldt ook voor $(2x, 2y, 2)$, $(3x, 3y, 3)$ en algemener (rx, ry, r) met $r \neq 0$. Alle drietallen (rx, ry, r) met $r \neq 0$ horen bij hetzelfde punt $P(x, y)$. Vermenigvuldigen we een stel homogene coördinaten (x, y, z) van een punt met een getal $r \neq 0$, dan krijgen we weer een stel homogene coördinaten van hetzelfde punt. Dat is precies wat de kwalificatie 'homogeen' wil uitdrukken. Houden we in (a, b, z) de a en de b vast en laten we z variëren, dan hoort bij iedere $z \neq 0$ precies één punt $\left(\frac{a}{z}, \frac{b}{z}\right)$. Zijn a en b niet beide 0, dan horen bij verschillende waarden van z verschillende punten, die allemaal op één lijn k door O liggen. Met $z = 1, 2, 3, \ldots$ krijgen we bijv. de punten $(a, b), (\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b), (\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}b), \ldots$, die allemaal op de lijn k door O en (a, b) liggen. Met $z = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ krijgen we $(2a, 2b), (3a, 3b), \ldots, (na, nb), \ldots$ Deze punten liggen eveneens op k en liggen steeds verder van O naarmate n toeneemt en dus z naar 0 nadert. Hetzelfde geldt als we $z = -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots, -\frac{1}{n}, \ldots$ nemen, we krijgen dan $(-2a, -2b), (-3a, -3b), \ldots, (-na, -nb), \ldots$ We kunnen zeggen dat het punt met homogene coördinaten (a, b, z) naar het *oneindig verre punt* van k convergeert als z naar 0 convergeert en $(a, b, 0)$ zou dan een stel homogene coördinaten van dit oneindig verre punt zijn. Het maakt hierbij niet uit of z van links of van rechts tot 0 nadert: als $(a, b, 0)$ een stel homogene coördinaten van een punt is dan mogen we deze met een getal $\neq 0$ vermenigvuldigen, i.h.b. met -1, dus $(-a, -b, 0)$ moet hetzelfde oneindig verre punt voorstellen als $(a, b, 0)$. We hebben hierbij verondersteld dat a en b niet beide 0 zijn. Het drietal $(0, 0, 0)$ is niet een stel homogene coördinaten van een punt, noch van een 'gewoon' punt noch van een oneindig ver punt.

Als $p_3 \neq 0$, dan ligt punt $P\left(\frac{p_1}{p_3}, \frac{p_2}{p_3}\right)$ op lijn $k:\ ax+by+c=0$ in $\mathbb{R}^2$ precies dan, wanneer (p_1, p_2, p_3) voldoet aan $ax+by+cz=0$. Gaan we over op homogene coördinaten dan gaat de vergelijking $ax+by+c=0$ van k over in de homogene vergelijking $ax+by+cz=0$. Voldoet één stel homogene coördinaten van P aan $ax+by+cz=0$, dan voldoet elk stel homogene coördinaten van P aan $ax+by+cz=0$. De vergelijking $ax+by+cz=0$ is niet alleen homogeen in x, y en z, maar ook in zijn coëfficiënten a, b en c. Vermenigvuldigen we deze coëfficiënten met een getal $\neq 0$, dan gaat de vergelijking over in een gelijkwaardige vergelijking die dezelfde lijn voorstelt. Voor het oneindig verre punt van lijn $k:\ ax+by+cz=0$ geldt $z=0$ en a en b zijn niet beide 0. Dus $(-b, a, 0)$ is een stel homogene coördinaten van het oneindig verre punt van lijn k. De lijnen

$$k_1:\ ax+by+c_1=0 \text{ en } k_2:\ ax+by+c_2=0$$

in $\mathbb{R}^2$ zijn evenwijdig, het drietal $(-b, a, 0)$ voldoet aan de corresponderende homogene vergelijkingen $ax+by+c_1z=0$ en $ax+by+c_2z=0$. De evenwijdige lijnen k_1 en k_2 hebben hetzelfde oneindig verre punt $(-b, a, 0)$. Is $c_1 \neq c_2$, dan zijn k_1 en k_2 verschillende lijnen en dan is het oneindig verre punt $(-b, a, 0)$ het enige gemeenschappelijke punt. Het drietal (p_1, p_2, p_3) is een stel homogene coördinaten van een oneindig ver punt precies dan wanneer $p_3 = 0$ en p_1 en p_2 zijn niet allebei 0. Zo'n drietal voldoet aan de vergelijking $z=0$ of voluit: $0x+0y+1z=0$. De vergelijking $z=0$ en ook iedere daarmee gelijkwaardige vergelijking is een vergelijking van de *oneindig verre lijn*. De oneindig verre lijn is de lijn waarop alle oneindig verre punten liggen. Iedere 'gewone' lijn snijdt de oneindige verre lijn in precies één oneindig ver punt. Twee evenwijdige lijnen snijden de oneindig verre lijn in hetzelfde oneindig verre punt.

In (x, y, z) hebben we aan z een speciale rol toegekend. Daar is geen dwingende reden voor. We hadden net zo goed (x, y, z) met $x \neq 0$ een stel homogene coördinaten van punt $\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$ in $\mathbb{R}^2$ kunnen noemen en de punten $(0, y, z)$ een stel homogene coördinaten van een oneindig ver punt..

In de volgende paragraaf definiëren we een projectief vlak waarin we helemaal geen onderscheid maken tussen gewone punten en oneindig verre punten.

1.3 Het projectieve vlak $\mathcal{P}$.

We noemen twee n-tallen $(x_1,...,x_n)$ en $(y_1,...,y_n)$ in $\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$ *evenredig* als er een getal $t \neq 0$ is zo dat $(x_1,...,x_n) = (t \cdot y_1,...,t \cdot y_n)$. Evenredigheid is een equivalentie-relatie onder n-tallen reële getallen $(x_1,...,x_n) \neq (0,...,0)$. De verzameling van alle n-tallen die evenredig zijn met $(x_1,...,x_n)$ noemen we een *verhouding* en duiden we aan met $x_1 : \cdots : x_n$.

1.3.1 *Definitie*. De *verhouding* $x_1 : \cdots : x_n$, met $x_1,...,x_n$ niet allemaal gelijk aan 0, is de verzameling $\{(t \cdot x_1,...,t \cdot x_n) \mid t \in \mathbb{R}, t \neq 0\}$.

Ieder n-tal $(x_1,...,x_n) \neq (0,...,0)$ behoort tot precies één verhouding. Twee n-tallen $(x_1,...,x_n)$ en $(y_1,...,y_n)$ die tot de dezelfde verhouding behoren [ofwel 'dezelfde verhouding hebben'] zijn evenredig. Evenredige n-tallen liggen, beschouwd als punten in $\mathbb{R}^n$, op een lijn in $\mathbb{R}^n$ door *O*. Een verhouding $x_1 : \cdots : x_n$ bestaat uit alle punten in $\mathbb{R}^n / \{O\}$ die op één lijn door *O* liggen.

1.3.2 *Definitie*. Het *projectieve vlak* $\mathcal{P}$ is de verzameling die bestaat uit alle verhoudingen $x_1 : x_2 : x_3$. De elementen van $\mathcal{P}$ heten *punten* en we noteren deze punten tussen ronde haakjes als $(x_1 : x_2 : x_3)$.

Het punt $P(p_1 : p_2 : p_3)$ is de verzameling $P = \{(tp_1, tp_2, tp_3) \mid t \in \mathbb{R}, t \neq 0\}$. Ieder element (tp_1, tp_2, tp_3) van deze verzameling noemen we een *stel coördinaten van P*. Een punt in $\mathcal{P}$ is dus strikt genomen niets anders dan de verzameling van zijn coordinaten. Een stel coördinaten van een punt *P* in $\mathcal{P}$ is een punt in $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$. Met een punt in $\mathcal{P}$ correspondeert precies één lijn door *O* in $\mathbb{R}^3$, dat is de lijn door *O* die alle coördinaten van *P* bevat. In $\mathcal{P}$ zelf is er niet een punt dat we de 'oorsprong' van $\mathcal{P}$ kunnen noemen. Wel spelen de *basispunten* $O_1(1:0:0)$, $O_2(0:1:0)$ en $O_3(0:1:0)$ een speciale rol en ook het *eenheidspunt* $E(1:1:1)$.

1.3.3 *Definitie*. Een *lijn a* in $\mathcal{P}$ is de deelverzameling van $\mathcal{P}$ die bestaat uit de punten die voldoen aan een vergelijking $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$, waarin a_1, a_2, a_3 niet alle drie gelijk aan 0 zijn. Een punt van $\mathcal{P}$ voldoet aan $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$, wanneer elk stel coördinaten van dit punt aan de vergelijking voldoet. Lijn *a* is bepaald door de verhouding $a_1 : a_2 : a_3$ en we gebruiken de notatie $[a_1 : a_2 : a_3]$ om lijn *a* aan te duiden. De notatie $[a_1, a_2, a_3]$ staat voor één bepaald getallendrietal in de verhouding $[a_1 : a_2 : a_3]$ en wordt een *stel coördinaten* van de lijn *a* genoemd. Ook $[ra_1, ra_2, ra_3]$ met $r \neq 0$ is dan een stel coördinaten van *a*. We noemen $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ de *vergelijking van a*.

Opmerking. Eigenlijk moeten we $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ *een* vergelijking van a noemen.

Een lijn a in V is een verzameling punten. Als $P \in a$, dan zeggen we 'P ligt op a' of '*a gaat door P*'. Als $P \in a$, dan zeggen we ook 'P en a zijn *incident*' of 'a en P zijn *incident*' .

Met een lijn $[a_1 : a_2 : a_3]$ in $\mathcal{P}$ correspondeert precies één vlak door O in $\mathbb{R}^3$ met dezelfde vergelijking $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ als de vergelijking van lijn a. Met ieder punt $P(p_1 : p_2 : p_3)$ op a correspondeert in $\mathbb{R}^3$ een lijn door O die in dat vlak ligt.

Afspraak. Met 'punt' en 'lijn' zonder meer zullen we in het volgende steeds een punt of een lijn in het projectieve vlak $\mathcal{P}$ bedoelen. Hebben we het over een punt of lijn in $\mathbb{R}^3$, dan zeggen we dat er uitdrukkelijk bij. We gebruiken de notatie $S = p \cap q$ om aan te geven dat p en q twee verschillende lijnen met *snijpunt* S zijn. De notatie PQ voor de *verbindingslijn* van de punten P en Q houdt stilzwijgend in dat $P \neq Q$.

Dualiteit. De relatie $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ is een symmetrische relatie tussen punt $(x_1 : x_2 : x_3)$ en lijn $[a_1 : a_2 : a_3]$. Deze symmetrie wordt *dualiteit* genoemd. Een bewering die geformuleerd kan worden uitsluitend met behulp van de begrippen 'punt', 'lijn', 'gaat door' en 'ligt op' gaat over in zijn *duale bewering* als we hierin 'punt', 'lijn', 'gaat door' en 'ligt op' in deze volgorde vervangen door 'lijn', 'punt' , 'ligt op' resp. 'gaat door'. We zullen in het volgende zien dat door dit *dualiseren* een ware bewering een eveneens ware duale bewering oplevert.

1.3.4 *Definitie*. Punten die op dezelfde lijn liggen noemen we *collineair*. Duaal tegenover het begrip 'punten op dezelfde lijn' staat 'lijnen door hetzelfde punt'. Lijnen die door hetzelfde punt gaan noemen we *concurrent*. De verzameling van alle lijnen door een punt P wordt een *lijnenwaaier* met *top P* genoemd. Duaal noemen we daarom de verzameling van alle punten op een lijn p ook een *puntenwaaier* met *drager p*. Een lijnenwaaier met top P wordt ook kortweg '*lijnenwaaier P*' genoemd. Een puntenwaaier met drager p noemen we ook '*de puntenwaaier p*'.

Opmerking. Een lijnenwaaier met drager p is dus hetzelfde als de lijn p zelf.

1.3.5 *Definitie*. *Het duale vlak* $\mathcal{P}^*$. De lijnen in het projectieve vlak $\mathcal{P}$ vormen het *duale* projectieve *vlak* $\mathcal{P}^*$. Een lijn p in $\mathcal{P}$ is een puntenwaaier met drager p. Duaal zou een lijn in $\mathcal{P}^*$ dan een lijnenwaaier met top P zijn. Een lijnenwaaier is eenduidig bepaald door zijn top. We kunnen daarom de punten van $\mathcal{P}$ als de 'lijnen' van het duale vlak $\mathcal{P}^*$ beschouwen. Het duale vlak $\mathcal{P}^{**}$ van $\mathcal{P}^*$ is weer het vlak $\mathcal{P}$ zelf, m.a.w. $\mathcal{P}^{**} = \mathcal{P}$.

In de volgende paragrafen bewijzen we een aantal belangrijke stellingen m.b.t. punten en lijnen in $\mathcal{P}$. Het zijn de equivalenten van stellingen die we al kennen uit de lineaire algebra van $\mathbb{R}^3$.

1.4 Verbindingslijnen en snijpunten. We gaan er vanuit dat de lezers kan rekenen met 2×2- en 3×3-determinanten.

1.4.1 Door verschillende punten $P(p_1 : p_2 : p_3)$ en $Q(q_1 : q_2 : q_3)$ gaat precies één lijn, namelijk de lijn $PQ = \left[\begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ q_2 & q_3 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} p_1 & p_3 \\ q_1 & q_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} \right]$.

Bewijs. Stel $P \neq Q$. We gaan na dat de vergelijking

$$\begin{vmatrix} x_1 & p_1 & q_1 \\ x_2 & p_2 & q_2 \\ x_3 & p_3 & q_3 \end{vmatrix} = 0$$

een vergelijking van lijn PQ is. Dat P en Q aan deze vergelijking voldoen is duidelijk. Ontwikkelen van de determinant naar de eerste kolom geeft

$$\begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ q_2 & q_3 \end{vmatrix} \cdot x_1 - \begin{vmatrix} p_1 & p_3 \\ q_1 & q_3 \end{vmatrix} \cdot x_2 + \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} \cdot x_3 = 0.$$

Uit $P \neq Q$ volgt dat de coëfficiënten van deze vergelijking niet allemaal 0 zijn. Dit is dus de vergelijking van een lijn door de punten P en Q.

Dualiseren geeft:

1.4.2 Twee verschillende lijnen $a[a_1 : a_2 : a_3]$ en $b[b_1 : b_2 : b_3]$ hebben precies één snijpunt, namelijk het punt $a \cap b = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$.

Deze stelling geeft een belangrijk verschil tussen de projectieve meetkunde in $\mathcal{P}$ en de gewone vlakke meetkunde in $\mathbb{R}^2$.

Bewijs. Stel $a \neq b$. Daaruit volgt dat $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$, $-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$ en $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ niet allemaal 0 zijn, dus $\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$ stelt inderdaad een punt in $\mathcal{P}$ voor. Er geldt

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - x_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + x_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Met $[x_1 : x_2 : x_3] = [a_1 : a_2 : a_3]$ en $[x_1 : x_2 : x_3] = [b_1 : b_2 : b_3]$ blijkt dat het punt

$$\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$$

zowel op a als op b ligt. Uit $a \neq b$ en 1.4.1 volgt dat a en b geen ander gemeenschappelijk punt hebben, m.a.w. genoemd punt is het snijpunt van a en b.

Opmerking. De waarde van een determinant heeft bij homogene coördinaten geen betekenis, het enige dat telt is de vraag of deze waarde 0 of $\neq 0$ is. In $\mathbb{R}^3$ is

$$\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$$

het *uitwendig product* $(a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3)$.

1.5 Parametervoorstelling van een lijn en een lijnenwaaier.

1.5.1 Zijn $P(p_1 : p_2 : p_3)$ en $Q(q_1 : q_2 : q_3)$ verschillende punten, dan ligt een punt R op lijn PQ precies dan, wanneer er getallen t en u zijn zo dat

$$R = (tp_1 + uq_1 : tp_2 + uq_2 : tp_3 + uq_3).$$

Opmerking. $(tp_1 + uq_1 : tp_2 + uq_2 : tp_3 + uq_3)$ wordt een *parametervoorstelling* van lijn PQ genoemd met *parameters* $t, u \in \mathbb{R}$. Parameters t en u zijn niet beide 0, want $t = u = 0$ levert niet een punt van $\mathcal{P}$ op.

Bewijs. Stel $P(p_1 : p_2 : p_3)$ en $Q(q_1 : q_2 : q_3)$ zijn twee verschillende punten. Dan is

$$\begin{vmatrix} x_1 & p_1 & q_1 \\ x_2 & p_2 & q_2 \\ x_3 & p_3 & q_3 \end{vmatrix} = 0$$

een vergelijking van lijn PQ. Uit de eigenschappen van 3×3-determinanten volgt dat de punten $R = (tp_1 + uq_1 : tp_2 + uq_2 : tp_3 + uq_3)$ aan deze vergelijking voldoen. Omgekeerd: is (r_1, r_2, r_3) een stel coördinaten van een punt R dat aan de vergelijking voldoet, dan $(r_1, r_2, r_3) = (tp_1 + uq_1, tp_2 + uq_2, tp_3 + uq_3)$ voor zekere t en u en dus $R = (tp_1 + uq_1 : tp_2 + uq_2 : tp_3 + uq_3)$.

Dualiseren geeft:

1.5.2 Zijn $a[a_1 : a_2 : a_3]$ en $b[b_1 : b_2 : b_3]$ verschillende lijnen, dan gaat lijn c door het snijpunt van a en b precies dan, wanneer er getallen t en u zijn zo dat

$$c = [ta_1 + ub_1 : ta_2 + ub_2 : ta_3 + ub_3].$$