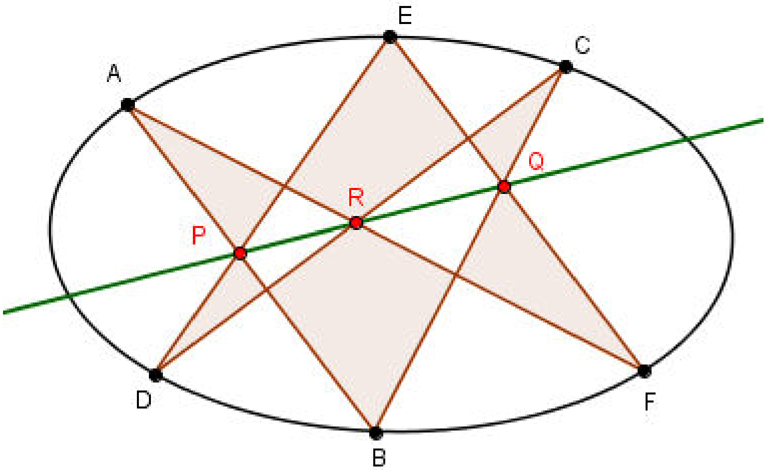
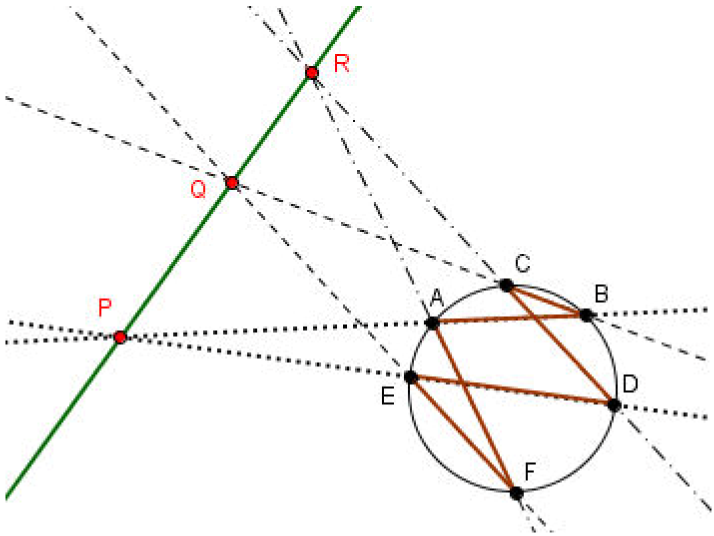
De Stelling van Pascal



Inhoud

De stelling van Pascal

1 Inleiding.



Stelling van Pascal. Liggen de hoekpunten van een zeshoek $ABCDEF$ op een ellips, hyperbool of parabool en zijn $P = AB \wedge DE$, $Q = BC \wedge EF$ en $R = CD \wedge FA$ de snijpunten van de paren overstaande zijden van de zeshoek, dan liggen P, Q en R op één lijn.

Opmerking. Met de zijden van zeshoek $ABCDEF$ bedoelen we niet lijnstukken, maar lijnen. De zeshoek mag zichzelf doorsnijden. Het gaat hier om de affiene versie van de stelling van Pascal, waarbij het bestaan van de snijpunten P, Q en R expliciet verondersteld wordt. [De notatie $P = AB \wedge DE$ betekent dat P het snijpunt is van de lijnen AB en DE, etc.]

Oneindig verre punten. Een interessante uitbreiding van de stelling krijgen we door ons voor te stellen dat twee evenwijdige lijnen elkaar snijden in een "oneindig ver punt". We spreken dan af dat alle oneindig verre punten van een vlak op één lijn liggen, de "oneindig verre lijn" van het vlak. Als bijv. $AB \parallel DE$ en $BC \parallel EF$, dan zijn P en Q oneindig verre punten en dus moet ook R een oneindig ver punt zijn [de lijn door P, Q en R is de oneindig verre lijn], m.a.w. dan ook $CD \parallel FA$. Of een ander voorbeeld: zijn P en Q gewone punten en is R een oneindig ver punt, dan gaat lijn PQ door R en ook CD en FA gaan door R, m.a.w. de lijnen PQ, CD en FA zijn dan evenwijdig.

We bewijzen de stelling van Pascal eerst voor een cirkel. Dat hij dan ook geldt voor ellipsen, hyperbolen en parabolen blijkt door een cirkel in een vlak V vanuit een punt O dit niet in V ligt te projecteren op een ander vlak W dat niet door O gaat.

2 De stelling van Pascal voor een cirkel en een ellips. Voor een eerste bewijs van deze stelling gebruiken we de *stelling van Menelaus* en de *machtstelling* voor cirkels.

Stelling van Menelaus. Zijn X, Y en Z drie, van K, L en M verschillende, punten op de zijlijnen KL, LM resp. MK van ΔKLM, dan liggen de punten X, Y en Z op één lijn precies dan, wanneer $\dfrac{\overrightarrow{KX}}{\overrightarrow{XL}} \cdot \dfrac{\overrightarrow{LY}}{\overrightarrow{YM}} \cdot \dfrac{\overrightarrow{MZ}}{\overrightarrow{ZK}} = -1$.

Dit is stelling AM 7.4.2 (AM = *Rinse Poortinga* **Analyse + Meetkunde**). Hierin stelt $\overrightarrow{UV}$ de van een teken voorziene *gerichte lengte* van het gerichte lijnstuk $\overrightarrow{UV}$ voor. Er geldt $\overrightarrow{VU} = -\overrightarrow{UV}$. De stelling van Menelaus kan in twee richtingen gebruikt worden:

$$X,\ Y \text{ en } Z \text{ op één lijn} \Rightarrow \frac{\overrightarrow{KX}}{\overrightarrow{XL}} \cdot \frac{\overrightarrow{LY}}{\overrightarrow{YM}} \cdot \frac{\overrightarrow{MZ}}{\overrightarrow{ZK}} = -1$$

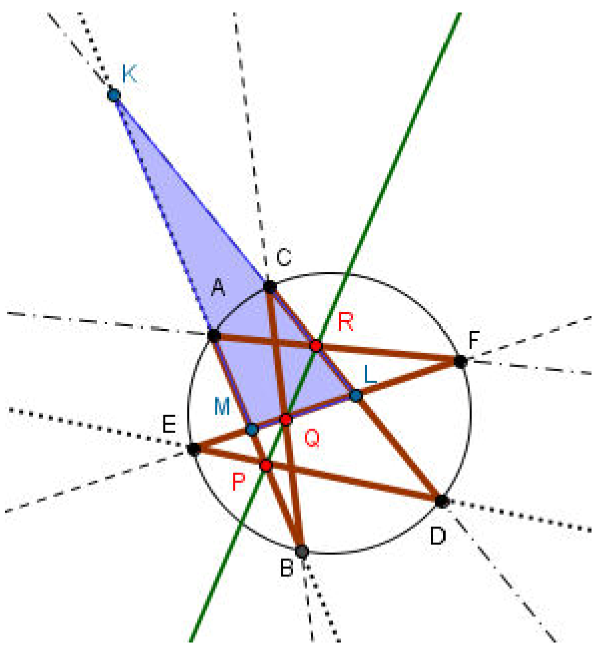
en

$$\frac{\overrightarrow{KX}}{\overrightarrow{XL}} \cdot \frac{\overrightarrow{LY}}{\overrightarrow{YM}} \cdot \frac{\overrightarrow{MZ}}{\overrightarrow{ZK}} = -1 \Rightarrow X,\ Y \text{ en } Z \text{ op één lijn.}$$

Verder hebben we nodig:

Machtstelling. Zijn k en m lijnen door een punt S die een cirkel snijden in de punten X, X' resp. Y, Y', dan $\overrightarrow{SX} \cdot \overrightarrow{SX'} = \overrightarrow{SY} \cdot \overrightarrow{SY'} =$ de macht van S t.o.v. de cirkel.

De lijnen k of m mogen ook raken aan de cirkel. [Stelling AM 7.11.1]



In laatste figuur hebben we de hoekpunten A, B, C, D, E en F iets anders gekozen dan in de eerste figuur, maar we tonen aan dat P, Q en R nog steeds op één lijn liggen. De lijnen AB, CD en EF zijn de zijlijnen van ΔKLM. We passen op ΔKLM

een paar keer de stelling van Menelaus toe. De punten D, E en P liggen op één lijn met D op KL, E op LM en P op MK. Menelaus geeft dus

$$\text{(a)}\ \frac{\overrightarrow{KD}}{\overrightarrow{DL}} \cdot \frac{\overrightarrow{LE}}{\overrightarrow{EM}} \cdot \frac{\overrightarrow{MP}}{\overrightarrow{PK}} = -1 \text{ met } XYZ = DEP .$$

Op dezelfde manier krijgen we met $XYZ = CQB$ en $XYZ = RFA$

$$\text{(b)}\ \frac{\overrightarrow{KC}}{\overrightarrow{CL}} \cdot \frac{\overrightarrow{LQ}}{\overrightarrow{QM}} \cdot \frac{\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{BK}} = -1 \text{ resp. (c) } \frac{\overrightarrow{KR}}{\overrightarrow{RL}} \cdot \frac{\overrightarrow{LF}}{\overrightarrow{FM}} \cdot \frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{AK}} = -1 .$$

Vermenigvuldigen van de linkerleden en rechterleden van (a), (b) en (c) geeft na iets veranderen van de volgorde:

$$\left(\frac{\overrightarrow{KR}}{\overrightarrow{RL}} \cdot \frac{\overrightarrow{LQ}}{\overrightarrow{QM}} \cdot \frac{\overrightarrow{MP}}{\overrightarrow{PK}} \right) \cdot \left(\frac{\overrightarrow{KD}}{\overrightarrow{DL}} \cdot \frac{\overrightarrow{LE}}{\overrightarrow{EM}} \cdot \frac{\overrightarrow{KC}}{\overrightarrow{CL}} \cdot \frac{\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{BK}} \cdot \frac{\overrightarrow{LF}}{\overrightarrow{FM}} \cdot \frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{AK}} \right) = -1 .$$

Volgens de machtstelling geldt

$$\overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{KB} = \overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KD} ,\ \overrightarrow{LE} \cdot \overrightarrow{LF} = \overrightarrow{LC} \cdot \overrightarrow{LD} \text{ en } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF}$$

ofwel

$$\frac{\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KD}}{\overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{KB}} = \frac{\overrightarrow{LE} \cdot \overrightarrow{LF}}{\overrightarrow{LC} \cdot \overrightarrow{LD}} = \frac{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF}} = 1 .$$

Hieruit volgt

$$\frac{\overrightarrow{KD}}{\overrightarrow{DL}} \cdot \frac{\overrightarrow{LE}}{\overrightarrow{EM}} \cdot \frac{\overrightarrow{KC}}{\overrightarrow{CL}} \cdot \frac{\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{BK}} \cdot \frac{\overrightarrow{LF}}{\overrightarrow{FM}} \cdot \frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{AK}} = 1$$

en dus

$$\frac{\overrightarrow{KR}}{\overrightarrow{RL}} \cdot \frac{\overrightarrow{LQ}}{\overrightarrow{QM}} \cdot \frac{\overrightarrow{MP}}{\overrightarrow{PK}} = -1 .$$

Volgens de stelling van Menelaus (nu in omgekeerde richting) betekent dit dat de punten P, Q en R op één lijn liggen. Hiermee is de stelling van Pascal voor cirkels in $\mathbb{R}^2$ bewezen. Iedere ellips in $\mathbb{R}^2$ is het beeld van een cirkel onder een affiene transformatie [Zie paragraaf AM 7.10]. Bij een affiene transformatie van $\mathbb{R}^2$ gaan lijnen over in lijnen en de snijpunten

$$P = AB \wedge DE ,\ Q = BC \wedge EF ,\ R = CD \wedge FA \text{ gaan over in}$$

$$P' = A'B' \wedge D'E', Q' = B'C' \wedge E'F', R' = C'D' \wedge F'A' .$$

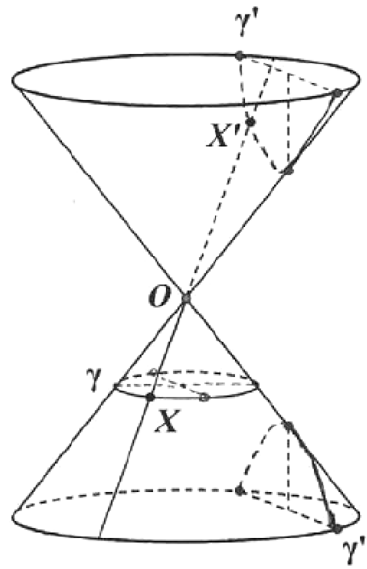
De stelling van Pascal geldt dus ook voor ellipsen in $\mathbb{R}^2$.

3 De stelling van Pascal voor hyperbolen en parabolen.

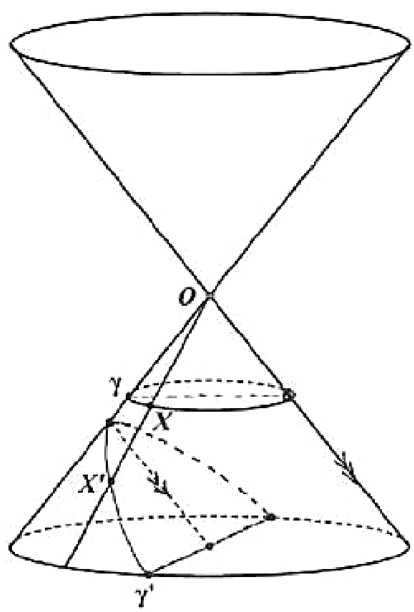
Dat de stelling van Pascal ook geldt voor hyperbolen en parabolen is als volgt in te zien. In de driedimensionale ruimte $\mathbb{R}^3$ nemen we twee vlakken *V* en *W* die niet door *O* gaan. We projecteren vervolgens vlak *V* vanuit O op vlak *W*. Afhankelijk van de stand van vlak W t.o.v. vlak *V* gaat bij zo'n projectie een cirkel in *V* over in een ellips, hyperbool of parabool in *W*. Gaan onder deze projectie de snijdende lijnenparen (AB, DE), (BC, EF) en (CD, FA) in *V* over in snijdende lijnenparen $(A'B', D'E')$, $(B'C', E'F')$ resp. $(C'D', F'A')$ in *W*, dan gaan hierbij de snijpunten $P = AB \wedge DE$, $Q = BC \wedge EF$ en $R = CD \wedge FA$ over in $P' = A'B' \wedge D'E'$, $Q' = B'C' \wedge E'F'$ resp. $R' = C'D' \wedge F'A'$. Liggen de punten *A*, *B*, *C*, *D*, *E* en *F* op een cirkel γ in *V*, dan liggen *P*, *Q* en *R* op één lijn en dus liggen ook P', Q', R' dan op één lijn. Volgens AM 7.10 zijn alle hyperbolen in $\mathbb{R}^2$ per definitie affien-equivalent en hetzelfde geldt voor alle parabolen in $\mathbb{R}^2$. Daaruit volgt eenvoudig dat er bij ieder tweetal hyperbolen in een vlak $W \subset \mathbb{R}^3$ een affiene transformatie van *W* is die de ene hyperbool op de andere afbeeldt. Hetzelfde geldt voor ieder tweetal parabolen in *W*.

Als de stelling van Pascal voor één hyperbool in *W* geldt, dan geldt hij dus voor alle hyperbolen in *W* en daarmee ook in een willekeurig ander vlak. Hetzelfde geldt m.b.t. parabolen. Bij projectie van *V* op W vanuit *O* gaan, mogelijk met één uitzondering, de lijnen in *V* over in lijnen in *W*. Als er in *V* een lijn *h* is zo dat het vlak door *O* en *h* evenwijdig is met vlak *W*, dan heeft *h* geen beeldlijn in *W*, een lijn door *O* en een punt op *h* snijdt vlak *W* dan niet. Twee lijnen *k* en *m* in *V*, die elkaar in een punt *S* op *h* snijden hebben in *W* een tweetal evenwijdige lijnen k' en m' als projectiebeeld, hun snijpunt zou punt S' moeten zijn, maar dat punt is er niet. Het is soms nuttig om ons S' als een "oneindig ver" punt van *W* voor te stellen. Het projectiebeeld van de lijn *h* in *V* stellen we ons dan voor als de (niet echt bestaande) "oneindig verre" lijn h' van *W*. Twee evenwijdige lijnen in *W* "snijden" elkaar in hetzelfde oneindig verre punt op h'. Denk aan spoorrails die elkaar op de horizon lijken te snijden, maar in werkelijkheid evenwijdig zijn.

Uit het bovenstaande blijkt dat we zonder bezwaar voor *V* en *W* twee speciale vlakken in $\mathbb{R}^3$ mogen kiezen. We gaan eerst na dat we *V* en *W* zodanig kunnen kiezen dat een bepaalde cirkel in *V* met uitzondering van twee punten door projectie vanuit *O* op een hyperbool in *W* wordt afgebeeld. Daarna kiezen *W* nog eens zodanig dat dezelfde cirkel in *V* met uitzondering van één punt door projectie vanuit *O* op een parabool in *W* wordt afgebeeld. Daarmee is de stelling van Pascal ook voor hyperbolen en parabolen in een willekeurig vlak, i.h.b. in $\mathbb{R}^2$, bewezen.



(1) *De Hyperbool*. De punten in $\mathbb{R}^3$ die voldoen aan de vergelijking $x^2 + y^2 = z^2$ vormen een kegel K met top O. Het horizontale vlak $V: z = -1$ snijdt deze kegel in cirkel γ die gegeven wordt door de beide vergelijkingen $x^2 + y^2 = 1$ en $z = -1$. Is X een punt op cirkel γ, dan ligt lijn OX op kegel K. Voor vlak W nemen we het verticale vlak $y = 2$. De gemeenschappelijke punten van vlak W en kegel K voldoen aan $x^2 + y^2 = z^2$ en $y = 2$ en dus ook aan $z^2 - x^2 = 4$ en $y = 2$. Hieruit blijkt direct dat de snijkromme van W en K een hyperbool γ' is. We gaan na dat γ' het beeld van γ is bij projectie vanuit O met uitzondering van de beide punten op γ die in het vlak $y = 0$ liggen. Het vlak $y = 0$ gaat door O en is evenwijdig met W. De punten van V die in vlak $y = 0$ liggen vormen de lijn h. Punten op h hebben geen projectiebeeld in W [ofwel worden geprojecteerd op een "oneindig ver" punt van W]. De punten van γ die op h liggen zijn de punten $(-1, 0, -1)$ en $(1, 0, -1)$. Lijn h is een middellijn van γ. Lijn OX heeft voor elk punt X op γ dat niet op h ligt een snijpunt X' met hyperbool γ'. Omgekeerd is elk punt X' op de hyperbool γ' het beeld van een punt X op cirkel γ. Lijn h verdeelt γ in twee cirkelbogen. Elke tak van de hyperbool γ' is het beeld van één van deze cirkelbogen.



(2) *Parabool*. K, γ en V blijven hetzelfde als in (1). Alleen vlak W kiezen we nu anders, we kiezen voor W het vlak met vergelijking $y + z = -2$. De gemeenschappelijke punten van vlak W en kegel K voldoen dan aan $x^2 + y^2 = z^2$ en $y + z = -2$, dus ook aan $x^2 + y^2 = (-y-2)^2$ en $y + z = -2$ ofwel aan

$$y = \tfrac{1}{4}x^2 - 1 \text{ en } y + z = -2 .$$

De snijkromme van W en K is dus een parabool γ'. Ga na dat het vlak $y + z = 0$ door O dat evenwijdig is met W nu slechts één punt van cirkel γ bevat, namelijk het punt $(0, 1, -1)$. Lijn OX met $X \neq (0, 1, -1)$ snijdt de parabool γ' in een punt X'. Elk punt op de parabool γ' in W is het beeld van een punt op de cirkel in V. In dit geval ligt γ' volledig op de onderste helft van de kegel.

Hiermee is de affiene versie van de stelling van Pascal, waarbij het bestaan van de snijpunten P, Q en R expliciet verondersteld wordt, ook voor hyperbolen en parabolen bewezen.

Stelling van Pascal. Liggen de hoekpunten van zeshoek $ABCDEF$ op een ellips, hyperbool of parabool en zijn

$$P = AB \wedge DE\ ,\ Q = BC \wedge EF \ \text{ en }\ R = CD \wedge FA$$

de snijpunten van de paren overstaande zijden van de zeshoek, dan liggen P, Q en R op één lijn.

Opmerking. Een tweetal opeenvolgende hoekpunten van de zeshoek kan samenvallen tot één punt. Als verbindingslijn van de in één punt samengevallen punten nemen we dan de raaklijn in dat punt. De stelling van Pascal blijft dan gelden en ook het bewijs [de machtstelling geldt ook bij raaklijnen aan een cirkel]. De stelling van Pascal blijft zelfs gelden, wanneer twee paren opeenvolgende hoekpunten samenvallen.

Oneindig verre punten. Een interessante uitbreiding van de stelling krijgen we door ons voor te stellen dat twee evenwijdige lijnen elkaar snijden in een "oneindig ver punt". We spreken dan af dat alle oneindig verre punten op één lijn liggen, de "oneindig verre lijn". Als bijv. $AB \,||\, DE$ en $BC \,||\, EF$, dan zijn P en Q oneindig verre punten en dus moet ook R een oneindig ver punt zijn [de lijn door P, Q en R is de oneindig verre lijn], m.a.w. dan ook $CD \,||\, FA$.
Of een ander voorbeeld: zijn P en Q gewone punten en is R een oneindig ver punt, dan gaat lijn PQ door R en ook CD en FA gaan door R, m.a.w. de lijnen PQ, CD en FA zijn dan evenwijdig.

De definitie van ellips, hyperbool of een parabool. In bovenstaand bewijs is het van belang hoe ellipsen, hyperbolen en parabolen gedefinieerd zijn. In AM 7.10 hebben we de ellips, hyperbool en parabool in $\mathbb{R}^2$ gedefinieerd als een puntenverzameling die beeld is onder een affiene transformatie van de standaardellips $x^2 + y^2 = 1$, van de standaardhyperbool $x^2 - y^2 = 1$ [of $x \cdot y = 1$] resp. van de standaardparabool $y = x^2$ [of $x = y^2$]. Een affiene transformatie van $\mathbb{R}^2$ is een samenstelling van een omkeerbare lineaire afbeelding en een translatie. De affiene transformaties van $\mathbb{R}^2$ vormen een groep. Twee figuren (puntenverzamelingen) zijn *affienequivalent*, als ze elkaars beeld zijn bij een affiene transformatie. Volgens bovenstaande definitie zijn alle ellipsen [waaronder cirkels] in $\mathbb{R}^2$ dus affienequivalent. Hetzelfde geldt voor alle hyperbolen en alle parabolen. Daarna hebben we bekeken onder welke voorwaarden een verzameling van het type

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0\},$$

waarin a, b en c niet alle drie gelijk aan 0 zijn, een ellips, hyperbool of een parabool of een ontaarde kegelsnede voorstelt.

Dit wordt bepaald door het teken van $ac-b^2$.

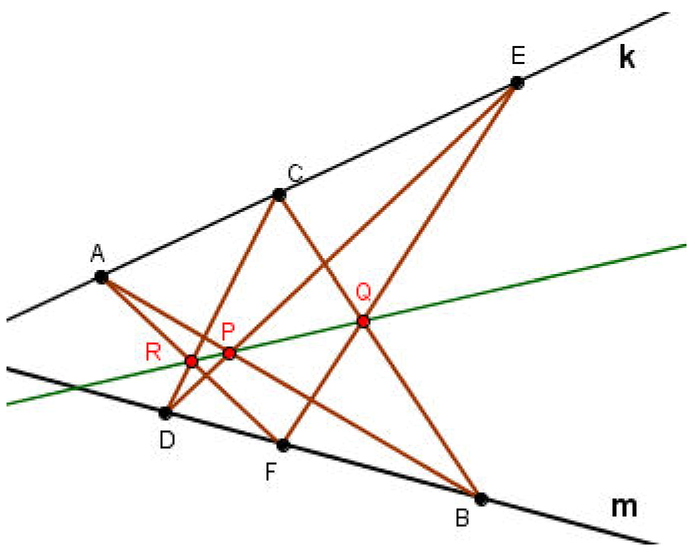
(i) Als $ac-b^2>0$, dan is V een ellips, een punt of leeg.

(ii) Als $ac-b^2<0$, dan is V een hyperbool of V bestaat uit twee snijdende lijnen.

(iii) Als $ac-b^2=0$, dan is V een parabool of V bestaat uit twee evenwijdige lijnen of V is één lijn of V is leeg.

Ellipsen, hyperbolen en parabolen zijn de niet-ontaarde kegelsneden, de rest noemen we ontaarde kegelsneden. Vervolgens hebben we aangetoond dat de niet-ontaarde kegelsneden inderdaad de bekende meetkundige eigenschappen hebben. Die meetkundige eigenschappen zijn vaak metrische eigenschappen m.b.t. brandpunten, richtlijnen etc. Zulke eigenschappen hebben te maken met afstanden en blijven daarom meestal niet behouden onder affiene transformaties. Zo hoeft een brandpunt of richtlijn van een figuur bij een affiene transformatie niet over te gaan in een brandpunt of richtlijn van de beeldfiguur. Als men ellipsen, hyperbolen en parabolen definieert op basis van metrische eigenschappen, dan wordt het iets lastiger om de affiene equivalentie aan te tonen van alle ellipsen, van alle hyperbolen resp. van alle parabolen in $\mathbb{R}^2$.

4 De stelling van Pappus. De ontaarde kegelsneden ontstaan als doorsnede van een kegel en een vlak door de top van kegel. Hierbij vatten we een cilinder op als een kegel met een "oneindig verre top". Voor de ontaarde kegelsneden die bestaan uit twee verschillende lijnen geldt de stelling van Pappus, een stelling die vergelijkbaar is met de stelling van Pascal. De stelling van Pappus (300 voor Chr.) is veel ouder dan die van Pascal (1640 na Chr.).



Stelling van Pappus. Als de hoekpunten A, B, C, D, E en F van een zeshoek afwisselend op twee lijnen k en m liggen, dan liggen de snijpunten $P = AB \wedge DE$, $Q = BC \wedge EF$ en $R = CD \wedge FA$ van de overstaande zijden op één lijn.

Opmerking. We nemen hier aan dat de snijpunten *P*, *Q* en *R* bestaan. Als $AB \parallel CD$, $BC \parallel EF$ of $CD \parallel FA$, dan geldt de stelling van Pappus bij geschikte interpretatie ook nog.

Bewijs. Het eerste deel gaat net als het bewijs van de stelling van Pascal. De lijnen *AB*, *CD* en *EF* zijn zijlijnen van ΔKLM met $K = AB \wedge CD$, $L = CD \wedge EF$ en $M = AB \wedge EF$. Zie de figuur hieronder. Menelaus geeft dan

(a) $\dfrac{\overrightarrow{KD}}{\overrightarrow{DL}} \cdot \dfrac{\overrightarrow{LE}}{\overrightarrow{EM}} \cdot \dfrac{\overrightarrow{MP}}{\overrightarrow{PK}} = -1$, (b) $\dfrac{\overrightarrow{KC}}{\overrightarrow{CL}} \cdot \dfrac{\overrightarrow{LQ}}{\overrightarrow{QM}} \cdot \dfrac{\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{BK}} = -1$ en (c) $\dfrac{\overrightarrow{KR}}{\overrightarrow{RL}} \cdot \dfrac{\overrightarrow{LF}}{\overrightarrow{FM}} \cdot \dfrac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{AK}} = -1$,

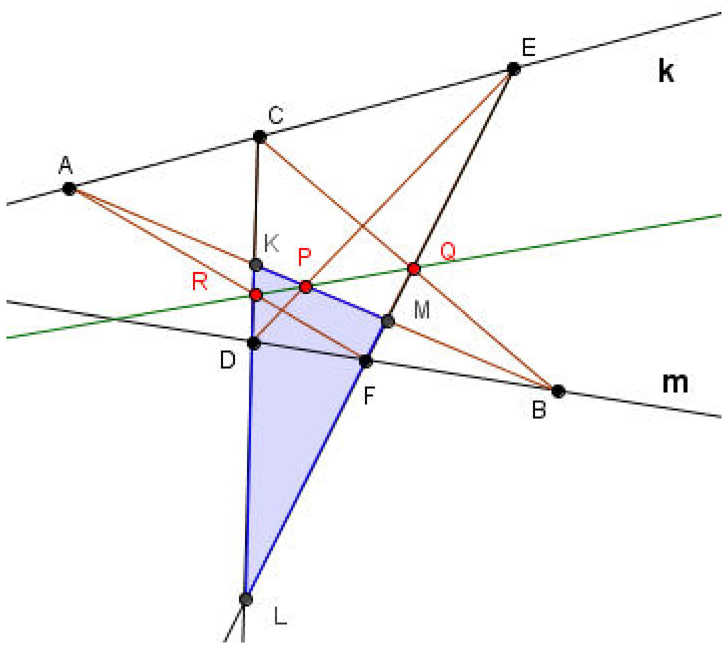
waaruit volgt

$$\left(\frac{\overrightarrow{KR}}{\overrightarrow{RL}} \cdot \frac{\overrightarrow{LQ}}{\overrightarrow{QM}} \cdot \frac{\overrightarrow{MP}}{\overrightarrow{PK}}\right) \cdot \left(\frac{\overrightarrow{KD}}{\overrightarrow{DL}} \cdot \frac{\overrightarrow{LE}}{\overrightarrow{EM}} \cdot \frac{\overrightarrow{KC}}{\overrightarrow{CL}} \cdot \frac{\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{BK}} \cdot \frac{\overrightarrow{LF}}{\overrightarrow{FM}} \cdot \frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{AK}}\right) = -1 .$$

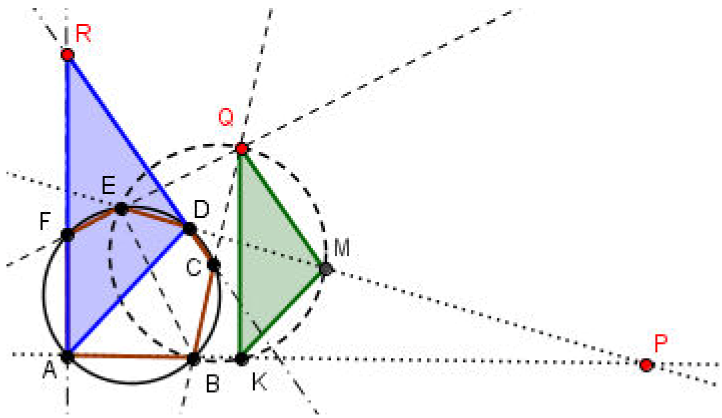
Om aan te tonen dat $\dfrac{\overrightarrow{KD}}{\overrightarrow{DL}} \cdot \dfrac{\overrightarrow{LE}}{\overrightarrow{EM}} \cdot \dfrac{\overrightarrow{KC}}{\overrightarrow{CL}} \cdot \dfrac{\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{BK}} \cdot \dfrac{\overrightarrow{LF}}{\overrightarrow{FM}} \cdot \dfrac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{AK}} = 1$ gebruiken nogmaals Menelaus in ΔKLM , nu met de lijnen *k* en *m*. Lijn *k* snijdt de zijlijnen van ΔKLM in de punten *A*, *C* en *E*. Lijn *m* snijdt de zijlijnen van ΔKLM in de punten *B*, *D* en *F*. Ga met behulp van de figuur hieronder na dat hieruit volgt dat

$$\frac{\overrightarrow{LE}}{\overrightarrow{EM}} \cdot \frac{\overrightarrow{KC}}{\overrightarrow{CL}} \cdot \frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{AK}} = -1 \quad \text{en} \quad \frac{\overrightarrow{KD}}{\overrightarrow{DL}} \cdot \frac{\overrightarrow{LF}}{\overrightarrow{FM}} \cdot \frac{\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{BK}} = -1 .$$

Daarmee zijn we klaar.



5 Een bewijs van Jan van IJzeren. Het volgende elementaire bewijs van de stelling van Pascal voor een cirkel komt van de Nederlandse wiskundige *van IJzeren*. Zie: http://www.tuencyclopedie.nl/index.php?title=Ijzeren_J._van .
Dit bewijs maakt gebruik van gelijke omtrekshoeken in een cirkel.



De hoekpunten van zeshoek $ABCDEF$ liggen op een cirkel. $AB \wedge DE = P$, $BC \wedge EF = Q$ en $CD \wedge FA = R$. De andere cirkel is de cirkel door E, B en Q. De lijnen AB en DE snijden de andere cirkel behalve in E en B ook nog in K resp. M. Met behulp van gelijke omtrekshoeken gaan we aantonen dat $RA \parallel QK$, $AD \parallel KM$ en $RD \parallel QM$. Daaruit volgt dat de verbindingslijnen AK, DM en RQ van de overeenkomstige hoekpunten door één punt gaan of evenwijdig zijn. Dat laatste is hier niet geval, want $DM \wedge AK = P$ en dus gaat ook RQ door P. Daarmee is dan de stelling van Pascal voor een cirkel bewezen.

Bij het bewijs gebruiken we:

Omtrekshoeken. Als A en B twee verschillende punten op een cirkel zijn en X en Y zijn twee andere punten op dezelfde cirkel dan $\sphericalangle(XA, XB) = \sphericalangle(YA, YB)$.

[Zie AM 7.1.2] De notatie $\sphericalangle(XA, XB)$ staat voor de *gerichte* hoek tussen de *lijnen* XA en XB. De volgorde is van belang: $\sphericalangle(XB, XA) = -\sphericalangle(XA, XB)$. Maar AX is dezelfde lijn als XA, dus bijv. $\sphericalangle(XA, XB) = \sphericalangle(AX, XB)$. Is ook PQ dezelfde lijn als AX, dan uiteraard ook $\sphericalangle(XA, XB) = \sphericalangle(PQ, XB)$.] Als X samenvalt met A, dan blijft de stelling geldig, wanneer we voor XA de raaklijn in A aan de cirkel nemen. Idem met B i.p.v. A of met Y i.p.v. X.

We rekenen met gerichte hoeken tussen lijnen omdat we de zijden van de zeshoek als lijnen en niet als lijnstukken moeten opvatten. Dit voorkomt hier dat we allerlei speciale gevallen m.b.t. de onderlinge ligging van de hoekpunten van de zeshoek op de cirkel moeten bekijken.

Met gerichte hoeken tussen lijnen wordt modulo π gerekend: Als $\theta = \sphericalangle(x\text{-as}, k)$, dan noemen we θ een *richtingshoek* van lijn *k*. Is *k* niet verticaal, dan is $\tan(\theta)$ de *richtingscoëfficiënt* van lijn *k*. Ga na dat

$$\boxed{\sphericalangle(k,n) = \sphericalangle(m,n) \Leftrightarrow k \parallel m}.$$

Deze stelling voor gerichte hoeken tussen lijnen kan de stelling m.b.t. F-hoeken en Z-hoeken voor niet-gerichte hoeken vervangen. [NB We moeten $\sphericalangle(k,n) = \sphericalangle(m,n)$ lezen als $\sphericalangle(k,n) = \sphericalangle(m,n) \pmod{\pi}$.]

Ga nu met behulp van bovenstaande stelling m.b.t. omtrekshoeken na dat

$$\sphericalangle(AD, AB) = \sphericalangle(CD, CB) = \sphericalangle(ED, EB) = \sphericalangle(EM, EB) = \sphericalangle(QM, QB)$$

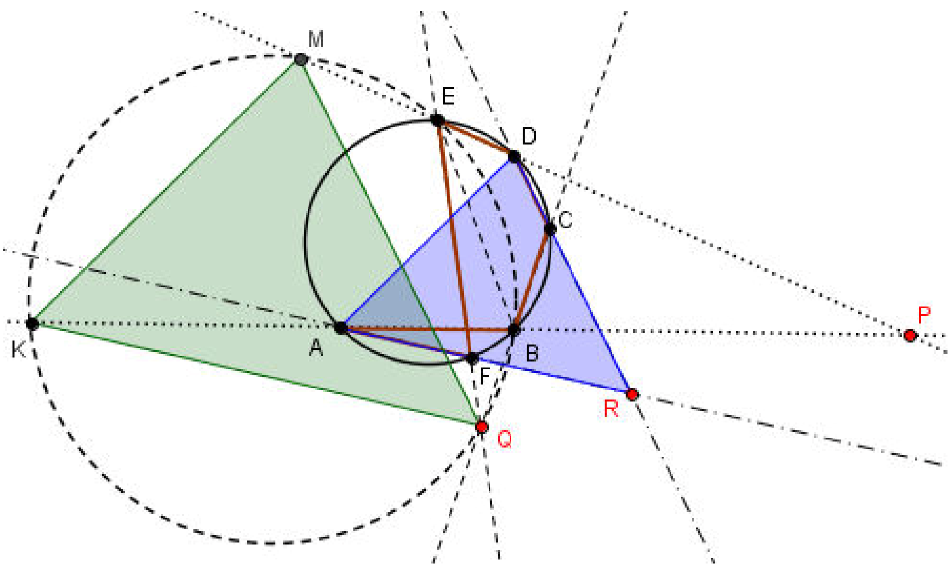
en ook

$$\sphericalangle(FA, FE) = \sphericalangle(DA, DE) = \sphericalangle(BA, BE)$$

$$= \sphericalangle(BK, BE) = \sphericalangle(MK, ME) = \sphericalangle(QK, QE) .$$

Uit $\sphericalangle(DA, DE) = \sphericalangle(MK, ME)$ volgt nu $DA \parallel MK$ [want lijn DE = lijn ME]. Ook $\sphericalangle(CD, CB) = \sphericalangle(QM, QB) \Rightarrow RD \parallel QM$ en $\sphericalangle(FA, FE) = \sphericalangle(QK, QE) \Rightarrow FA \parallel QK$.

De situatie bij een heel andere ligging van de hoekpunten van de zeshoek zie je in de figuur hieronder. Dit laat zien dat het niet overbodig is met gerichte hoeken tussen lijnen te werken om het bewijs voldoende algemeen te houden.



6 Pascal en Pappus met behulp van dubbelverhoudingen.
Een derde bewijs van de stelling van Pascal voor een cirkel gebruikt *dubbelverhoudingen*.

Definitie. Zijn A, B, C en D vier verschillende punten op een lijn k, dan is de dubbelverhouding $(ABCD)$ gedefinieerd door

$$(ABCD)=\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}:\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}.$$

De dubbelverhouding blijft behouden onder projectie. Zie paragraaf AM 7.15.

Dubbelverhouding bij projectie. Zijn k en m twee lijnen die niet door punt P gaan en zijn A, B, C en D vier verschillende punten op k , dan geldt

$$(A'B'C'D')=(ABCD)=\frac{\sin\sphericalangle APC}{\sin\sphericalangle CPB}:\frac{\sin\sphericalangle APD}{\sin\sphericalangle DPB},$$

wanneer A', B', C' en D' de snijpunten van de lijnen PA, PB, PC en PD met lijn m zijn.

Opmerking. De punten op lijn k worden hierbij vanuit P op lijn m geprojecteerd. Een punt X op k heeft geen projectiebeeld op m, wanneer PX evenwijdig met lijn m is. We nemen hier aan dat de punten A', B', C' en D' inderdaad bestaan. Het teken $\sphericalangle$ staat hier voor een *gerichte* hoek: $\sphericalangle YPX=-\sphericalangle XPY$. De waarde van de uitdrukking

$$\frac{\sin\sphericalangle APC}{\sin\sphericalangle CPB}:\frac{\sin\sphericalangle APD}{\sin\sphericalangle DPB}$$

verandert niet, wanneer we $k\cdot\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ bij alle hoeken optellen en is dus gelijk aan

$$\frac{\sin\sphericalangle(PA,PC)}{\sin\sphericalangle(PC,PB)}:\frac{\sin\sphericalangle(PA,PD)}{\sin\sphericalangle(PD,PB)},$$

waarin we werken met gerichte hoeken tussen lijnen.

Naar aanleiding van het bovenstaande definiëren we nu ook dubbelverhouding (PA,PB,PC,PD), afgekort tot $P(ABCD)$, van vier verschillende lijnen PA, PB, PC en PD die door één punt P gaan d.m.v.

$$P(ABCD)=\frac{\sin\sphericalangle(PA,PC)}{\sin\sphericalangle(PC,PB)}:\frac{\sin\sphericalangle(PA,PD)}{\sin\sphericalangle(PD,PB)}.$$

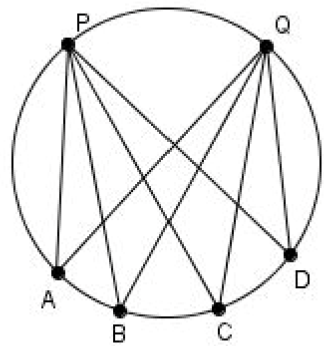
Het is hierbij niet nodig dat de punten A, B, C en D op één lijn liggen. Is m een lijn die de lijnen PA, PB, PC en PD snijdt in A', B', C' resp. D', dan geldt

$$P(ABCD)=P(A'B'C'D')=(A'B'C'D').$$

Uit de stelling m.b.t. de omtrekshoeken van een cirkel uit de vorige paragraaf volgt dat

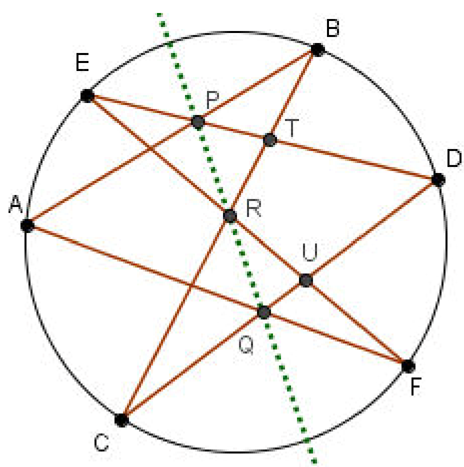
$$P(ABCD) = Q(ABCD),$$

wanneer A, B, C en D vier verschillende punten op een cirkel zijn en P en Q twee andere punten op dezelfde cirkel.



Opgave. Stel A, B, C , D en X zijn punten op een lijn k . Ga na dat dan $(ABCX) = (ABCD) \Leftrightarrow X = D$. Evenzo $(ABXD) = (ABCD) \Leftrightarrow X = C$, $(AXCD) = (ABCD) \Leftrightarrow X = B$ en ook $(XBCD) = (ABCD) \Leftrightarrow X = A$.

[We gebruiken hier alleen dubbelverhoudingen van vier verschillende punten.]



In de figuur hierboven liggen de hoekpunten van zeshoek $ABCDEF$ op een cirkel en $P = AB \wedge DE$, $Q = CD \wedge FA$, $T = BC \wedge ED$, $U = CD \wedge EF$. De volgende dubbelverhoudingen zijn gelijk:

$$(EPTD) = B(EPTD) = B(EACD) = F(EACD) = (UQCD).$$

Stel verder $R = BC \wedge PQ$ en $X = CD \wedge ER$. Dan ook

$$(EPTD) = R(EPTD) = (XQCD).$$

Uit $(UQCD) = (XQCD)$ volgt $X = U$ en dus $R = BC \wedge EF$. Hiermee is de stelling van Pascal voor een cirkel nogmaals aangetoond.

Opgave. Bewijs op soortgelijke manier ook de stelling van Pappus.

7. De stelling van Pascal omgekeerd.

Door 5 verschillende punten, waarvan er geen 3 op één lijn liggen, gaat precies één niet-ontaarde kegelsnede. Met behulp van de stelling van Pascal volgt hieruit eenvoudig:

Pascal omgekeerd. Liggen geen drie van de vijf verschillende punten A, B, C, D en E op één lijn en is κ de kegelsnede die door deze punten gaat, dan ligt een zesde punt F op κ, wanneer de punten $P = AB \wedge DE$, $Q = BC \wedge EF$ en $R = CD \wedge FA$ op één lijn liggen.

[Hierin kan één van de punten P, Q en R een oneindig ver punt zijn. Ook is het mogelijk dat P, Q en R alle drie oneindig verre punten zijn.]

Voor een mooie toepassing van deze omkering van Pascal zie het artikel

Pascal en de negenpuntskegelsnede

dat te vinden is op http://rinsepoortinga.nl/geogebra/pascal9punt.pdf .
