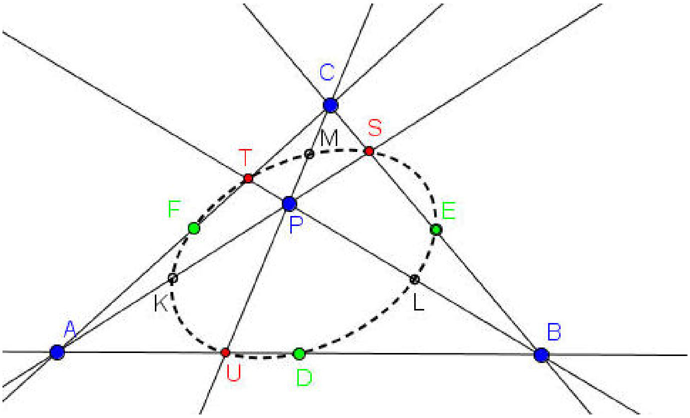
Pascal en de negenpuntskegelsnede



De zijden van driehoek ABC hierboven vatten we op als lijnen en niet als lijnstukken. De middens van de lijnstukken AB, BC en CA zijn D, E en F. De middens van de lijnstukken AP, BP en CP zijn K, L en M. Punt P ligt niet op een zijde van driehoek ABC. Lijn AP snijdt zijde BC in S, lijn BP snijdt zijde AC in T en lijn CP snijdt zijde AB in U. In het volgende zullen we met een uitgebreide versie van de *stelling van Pascal* bewijzen dat de 9 punten D, E, F, K, L, M, S, T en U op een kegelsnede κ liggen. Kegelsnede κ noemen we de *negenpuntskegelsnede* die bepaald wordt door driehoek ABC en punt P.

1. Een uitbreiding van de stelling van Pascal. Door 5 punten A, B, C, D en E, waarvan er geen 3 op een lijn liggen, gaat precies één niet-ontaarde kegelsnede κ. Volgens de *stelling van Pascal* ligt een zesde punt F op κ precies dan, wanneer de 3 snijpunten van de paren overstaande zijden van zeshoek $ABCDEF$ op één lijn liggen. De zijden van de zeshoek vatten we op als lijnen en niet als lijnstukken. Als $P = AB \wedge DE$ (snijpunt van lijn AB en lijn DE), $Q = BC \wedge EF$ en $R = CD \wedge FA$, dan ligt F op κ precies dan, wanneer P, Q en R op één lijn liggen.

Twee lijnen in een vlak hoeven elkaar niet te snijden, maar kunnen ook evenwijdig zijn. Ook in dit geval kunnen we de stelling van Pascal gebruiken. We breiden daartoe het vlak uit met *oneindig verre punten*. [In paragraaf 5 wordt uitgelegd hoe dat kan.] Op iedere lijn ligt dan één oneindig ver punt. Twee evenwijdige lijnen hebben hetzelfde oneindig verre punt. De oneindig verre punten van het vlak vormen samen de *oneindig verre lijn* ℓ_∞. Twee verschillende gewone lijnen hebben dan altijd een snijpunt. Dit snijpunt is een oneindig ver punt precies dan, wanneer beide lijnen evenwijdig zijn. Een gewone lijn en de oneindig verre lijn ℓ_∞ hebben een oneindig ver snijpunt. Door twee verschillende gewone punten P en Q gaat precies één lijn PQ. Dit geldt nu ook wanneer P of Q (of beide) oneindig verre punten zijn.

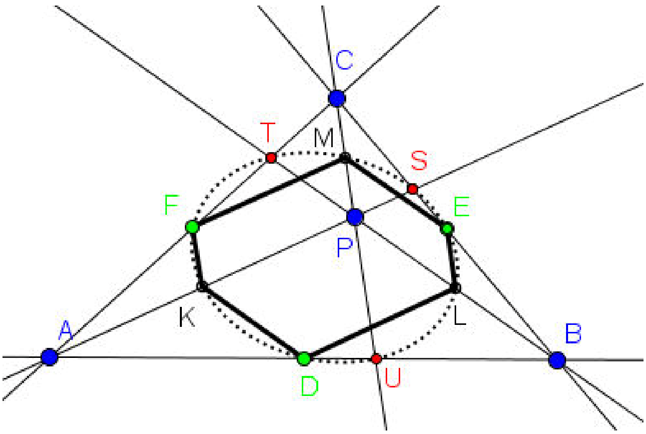
Voorbeeld. Stel κ is de kegelsnede door de 5 punten A, B, C, D en E. Verder is F een zesde punt en $P = AB \wedge DE$, $Q = BC \wedge EF$ en $R = CD \wedge FA$. Stel nu dat R een oneindig ver punt is, m.a.w. $CD||FA$ (CD evenwijdig FA). Als dan P en Q gewone punten zijn, dan liggen P, Q en R op één lijn, als R het oneindig verre punt van lijn PQ is, d.w.z. als $PQ||CD$ (en dus ook $PQ||FA$). Is dat inderdaad het geval, dan ligt F op κ.

Voorbeeld. Stel κ is de kegelsnede door de 5 punten A, B, C, D en E. Verder is F weer zesde punt en $P = AB \wedge DE$, $Q = BC \wedge EF$ en $R = CD \wedge FA$. Als P, Q en R alle drie oneindig verre punten zijn, dan liggen ze op de oneindig verre lijn ℓ_∞. Dat betekent dat $AB||DE$, $BC||EF$ en $CD||FA$, m.a.w. elk paar overstaande zijden van zeshoek $ABCDEF$ is een paar evenwijdige lijnen. Is dat het geval, dan ligt F op κ.

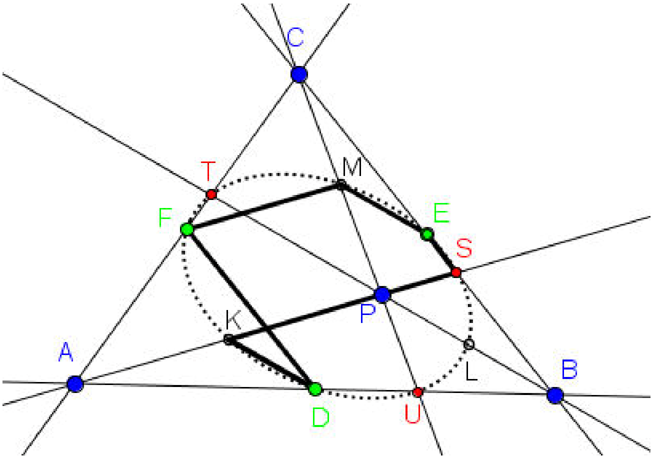
Het speciale geval uit het laatste voorbeeld zullen we in de volgende paragraaf gebruiken.

Voor een bewijs van de stelling van Pascal zie
http://www.rinsepoortinga.nl/geogebra/pascal.pdf.

2. De negenpuntskegelsnede.
Zie de figuur hieronder. Uit de stelling van Pascal volgt dat de punten D, E, F, K, L en M op een kegelsnede κ liggen, want elk paar overstaande zijden van de zeshoek $DLEMFK$ is een paar evenwijdige lijnen. Bewijs dit.



Om aan te tonen dat ook $S = AP \wedge BC$ op deze kegelsnede κ ligt bekijken we een andere zeshoek, namelijk zeshoek *EMFDKS*. Zie de volgende figuur. Ga na dat *EM*||*DK*, *MF*||*KS* en *FD*||*SE*. Dus ook *EMFDKS* is een zeshoek waarin elk paar overstaande zijden een paar evenwijdige lijnen is. Met Pascal volgt hieruit dat punt *S* op κ ligt.



Op dezelfde manier kunnen we aantonen dat ook $T = BP \wedge AC$ en $U = CP \wedge AB$ op κ liggen. We noemen κ daarom de *negenpuntskegelsnede* die bepaald wordt door driehoek *ABC* en het punt *P*.

3. Speciale gevallen. Als *P* het *hoogtepunt* van driehoek *ABC* is, dat is κ een cirkel, de *negenpuntscirkel* van driehoek *ABC*. Als *AP* een *zwaartelijn* van de driehoek is, dan valt *S* met *E* samen en raakt κ aan zijde *BC*. Als *P* het *zwaartepunt* van driehoek *ABC* is, dan raakt κ aan de zijden *AB*, *BC* en *AC* van de driehoek.

Het is niet nodig dat punt *P* binnen driehoek *ABC* ligt. Maak de figuur aan het begin van dit artikel in *Geogebra* en versleep punt *P*. Je ziet dan dat de kegelsnede van een ellips in een hyperbool verandert en omgekeerd, iedere keer dat punt *P* een zijde van de driehoek passeert. Kegelsnede κ heeft een middelpunt. Ga na dat dit het punt

$$N = \tfrac{1}{2}(D + M) = \tfrac{1}{4}(A + B + C + P)$$

is. Hieruit volgt dat κ niet een parabool is. Laat $Z = \tfrac{1}{3}(A + B + C)$ het zwaartepunt van de driehoek zijn. Toon aan dat $Z = P + \tfrac{4}{3}(N - P)$. Dus *Z*, *P* en *N* liggen op één lijn, de *Eulerlijn* bij driehoek *ABC* en punt *P*, en $ZN : NP = 1 : 3$.

Gelijkwaardigheid van de punten A, B, C en P. Het lijkt alsof punt *P* in het voorgaande een andere rol speelt dan de punten *A*, *B* en *C*. Dat is echter niet het geval. Ga na dat we precies dezelfde figuur krijgen, als we bijvoorbeeld driehoek *ABP* nemen met punt *C* in de rol van vierde punt.

We hebben verondersteld dat de lijnen *AP*, *BP* en *CP* de zijden *BC*, *AC* resp. *AB* daadwerkelijk snijden, m.a.w. dat geen van *S*, *T* en *U* een oneindig ver punt is. Ga na met Geogebra na wat er gebeurt als *BP*||*AC* of *CP*||*AB*. [Beide kan ook, *ABPC* is dan een parallellogram.]

Hiermee is een stelling bewezen die reeds in 1892 uitgesproken werd door *Maxime Bôcher*:

ON A NINE-POINT CONIC.

By Dr. Maxime Bôcher, Cambridge, Mass.

It does not seem to have been noticed that a few well-known facts, when properly stated, yield the following direct generalization of the famous nine-point circle theorem :—

Given a triangle ABC and a point P in its plane, a conic can be drawn through the following nine points :

(1) *The middle points of the sides of the triangle ;*
(2) *The middle points of the lines joining P to the vertices of the triangle ;*
(3) *The points where these last named lines cut the sides of the triangle.*

Later in 1892 formuleert *Thomas F. Holgate* een generalisering van deze stelling:

ON THE CONE OF SECOND ORDER WHICH IS ANALOGOUS TO THE NINE-POINT CONIC.

By Mr. Thomas F. Holgate, Worcester, Mass.

The theorem on the existence of the so-called nine-point conic may be stated in its most general form as follows :—

Let ABCD be any complete quadrangle whose six sides, AB, AC, AD, BC, BD, CD are cut by an arbitrary straight line a in the points P, Q, R, S, T, V, respectively ; and let E, F, H, K, L, M be the harmonic conjugates of these points with respect to the pairs of vertices of the quadrangle, so that AEBP, AFCQ, etc., are harmonic ranges. Then a conic may be passed through the six points E, F, H, K, L, M, on which will also lie the three points of intersection, X, Y, Z, of the pairs of opposite sides of the quadrangle.

Deze bewering gaan we in de volgende paragrafen toelichten.

4. Affiene transformaties van $\mathbb{R}^2$.

Een punt in een vlak kunnen we representeren door een coördinatenpaar (x, y) met $x, y \in \mathbb{R}$. Daarna kunnen we dit vlak identificeren met $\mathbb{R}^2$. Een *affiene transformatie* van $\mathbb{R}^2$ is de samenstelling van een omkeerbare lineaire afbeelding en een translatie.

Een affiene transformatie *F* van $\mathbb{R}^2$ die punt (x, y) op (x', y') afbeeldt, wordt gegeven door twee vergelijkingen

$$F: \begin{cases} x' = p_1x + q_1y + r_1 \\ y' = p_2x + q_2y + r_2 \end{cases}$$

De omkeerbaarheid van *F* wordt gegarandeerd door de eis dat

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} = p_1q_2 - p_2q_1 \neq 0 .$$

Het product van twee affiene transformaties is weer een affiene transformatie en ook het omgekeerde (de inverse) van een affiene transformatie is een affiene transformatie. [Kortom de affiene transformaties van $\mathbb{R}^2$ vormen een *transformatiegroep*.]

4.1 *Stelling*. Een affiene transformatie van $\mathbb{R}^2$ ligt vast, zodra de beelden A', B', C' van drie punten *A*, *B* en *C*, die niet op één lijn liggen, bekend zijn, d.w.z. er is dan precies één affiene transformatie *F* zo dat $F(A) = A'$, $F(B) = B'$ en $F(C) = C'$.

Belangrijk is welke meetkundige eigenschappen van een figuur behouden blijven onder affiene transformaties. Zulke eigenschappen heten de *affiene eigenschappen* van de figuur. Twee figuren die elkaars beeld zijn bij een affiene transformatie van $\mathbb{R}^2$ heten *affien equivalent*. Volgens de stelling hierboven zijn alle driehoeken affien equivalent.

Bij een affiene transformatie *F* van $\mathbb{R}^2$ gaan lijnen over in lijnen: een paar snijdende lijnen gaat over in een paar snijdende lijnen en een paar evenwijdige lijnen gaat over in een paar evenwijdige lijnen. Door twee verschillende punten *A* en *B* gaat één lijn, de lijn *AB*. Als we het over lijn *AB* hebben, dan veronderstellen we stilzwijgend dat $A \neq B$. Een punt *X* ligt op lijn *AB* precies dan, wanneer er een getal *t* is zo dat $X = A + t(B - A)$. Met $t = 0$ krijgen we $X = A$, met $t = 1$ krijgen we $X = B$. *Lijnstuk AB* bestaat uit de punten $X = A + t(B - A)$ met $0 \le t \le 1$. Het *midden* $M = \frac{1}{2}(A + B)$ van lijnstuk *AB* krijgen we met $t = \frac{1}{2}$. Als $A' = F(A)$, $B' = F(B)$, dan wordt lijn *AB* afgebeeld op lijn $A'B'$ en punt $X = A + t(B - A)$ wordt hierbij afgebeeld op punt $X' = A' + t(B' - A')$. I.h.b. wordt het midden $M = \frac{1}{2}(A + B)$ van lijnstuk *AB* afgebeeld op het midden $M' = \frac{1}{2}(A' + B')$ van het beeldlijnstuk $A'B'$.

Een lijn in $\mathbb{R}^2$ kunnen we ook beschrijven d.m.v. een vergelijking van de vorm $ax + by + c = 0$, waarin *a* en *b* niet beide gelijk zijn aan 0.

Een kegelsnede in $\mathbb{R}^2$ bestaat uit de punten (x, y) die voldoen aan een kwadratische vergelijking van de vorm

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

waarin a, b en c niet alle drie gelijk zijn aan 0. De kegelsnede is niet-ontaard, wanneer hij niet leeg is en geen drie punten op de kegelsnede op één lijn liggen. Een niet-ontaarde kegelsnede is een ellips (waartoe we ook een cirkel rekenen), een hyperbool of een parabool. Een ontaarde kegel kan een paar snijdende lijnen zijn [bijv. $xy = 0$], een paar 'samengevallen' lijnen [bijv. $x^2 = 0$], een punt [bijv. $x^2 + y^2 = 0$] of leeg [bijv. $x^2 + y^2 + 1 = 0$]. Als we het in het volgende over een kegelsnede hebben, dan bedoelen we steeds een niet-ontaarde kegelsnede. Bij een affiene transformatie van $\mathbb{R}^2$ gaat een ellips over in een ellips, een hyperbool gaat over in een hyperbool en een parabool gaat over in een parabool. Ellipsen en hyperbolen hebben een middelpunt. Een lijn door het middelpunt M van een kegelsnede heet een *middellijn* van de kegelsnede. Snijdt een middellijn de kegelsnede is de punten S en T, dan is M het midden van lijnstuk ST.

De figuur in $\mathbb{R}^2$ die bestaat uit een driehoek ABC en een punt P, dat niet op een zijde van de driehoek ligt, wordt door een affiene transformatie F afgebeeld op een driehoek $A'B'C'$ en een punt P', dat niet op een zijde van driehoek $A'B'C'$ ligt. Middens van lijnstukken worden hierbij op de middens van de beeldlijnstukken afgebeeld. Uit het voorgaande volgt dat de bij driehoek ABC en punt P behorende negenpuntskegelsnede κ door F afgebeeld wordt op de negenpuntskegelsnede κ' die hoort bij driehoek $A'B'C'$ en punt P'.

Als P het hoogtepunt van driehoek ABC is, dan is κ de negenpuntscirkel van driehoek ABC en zijn beeld κ' is een ellips.

5. Homogene coördinaten.

We breiden $\mathbb{R}^2$ op de bekende wijze uit met oneindig verre punten door over te gaan op *homogene coördinaten* $(x_1 : x_2 : x_3)$. De dubbele punten geven aan dat slechts de verhouding van de coördinaten van belang is. We mogen de homogene coördinaten van een punt met een willekeurig getal $t \neq 0$ vermenigvuldigen. Als $t \neq 0$, dan is punt $(x_1 : x_2 : x_3)$ hetzelfde punt als punt $(tx_1 : tx_2 : tx_3)$. De punten $(x_1 : x_2 : x_3)$, waarin x_1, x_2 en x_3 niet alle drie gelijk aan 0 zijn, vormen samen het *projectieve vlak* $\mathcal{P}$.

Een *gewoon* punt $(x_1 : x_2 : x_3)$ in $\mathcal{P}$ is een punt met $x_3 \neq 0$, dat we ook kunnen schrijven als $\left(\frac{x_1}{x_3} : \frac{x_2}{x_3} : 1\right)$ en correspondeert met punt $(x, y) = \left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right)$ in $\mathbb{R}^2$.

Met een *oneindig ver punt* $(x_1 : x_2 : 0)$ in $\mathcal{P}$ correspondeert geen punt in $\mathbb{R}^2$.

Een lijn in $\mathcal{P}$ bestaat uit de punten, die voldoen aan een homogene eerstegraads vergelijking $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$, waarin de coëfficiënten a_1, a_2, a_3 niet alle drie gelijk aan 0 zijn. Als $a_1 = a_2 = 0$, dan hebben we te maken met de *oneindig verre lijn* ℓ_∞, die alle oneindig verre punten bevat en vergelijking $x_3 = 0$ heeft. Als a_1 en a_2 niet beide gelijk aan 0 zijn, dan hebben we te maken met een *gewone lijn*. Op een gewone lijn $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ ligt precies één oneindig ver punt, namelijk $(a_2 : -a_1 : 0)$.

Door twee verschillende (gewone of oneindig verre) punten $P(p_1 : p_2 : p_3)$ en $Q(q_1 : q_2 : q_3)$ in $\mathcal{P}$ gaat één lijn. Een vergelijking van lijn *PQ* kan met behulp van een determinant gegeven worden in de vorm

$$\det(P,Q,X) = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & x_1 \\ p_2 & q_2 & x_2 \\ p_3 & q_3 & x_3 \end{vmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0,$$

met

$$a_1 = \begin{vmatrix} p_2 & q_2 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix}, \quad a_2 = -\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix} \text{ en } a_3 = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix}.$$

Een kegelsnede in $\mathbb{R}^2$ heeft een kwadratische vergelijking van de vorm

$$(1) \quad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

Een kegelsnede in $\mathcal{P}$ bestaat uit de punten $(x_1 : x_2 : x_3)$ die voldoen aan een homogene kwadratische vergelijking

$$(2) \quad ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1x_3 + ex_2x_3 + fx_3^2 = 0,$$

waarin de coëfficiënten a, b, c, d, e, f niet allemaal gelijk aan 0 zijn. Hij is niet-ontaard, wanneer hij niet leeg is en geen drie van zijn punten op één lijn liggen. Met een kegelsnede in $\mathcal{P}$ bedoelen we in het volgende steeds een niet-ontaarde kegelsnede. Is $(x_1 : x_2 : x_3)$ een gewoon punt dat aan (2) voldoet, dan voldoet (x, y) met $x = x_1 / x_3$, $y = x_2 / x_3$ aan (1). Een oneindig ver punt $(x_1 : x_2 : 0)$ voldoet aan (2), wanneer

$$(3) \quad ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 = 0.$$

De discriminant $b^2 - 4ac$ van vergelijking (3) bepaalt of de kegelsnede 0, 1 of 2 snijpunten met de oneindig verre lijn ℓ_∞ heeft. Een ellips bevat geen oneindig verre punten, een parabool bevat 1 oneindig ver punt en een hyperbool bevat 2 oneindig verre punten.

6. Affiene transformaties van $\mathcal{P}$.

Een affiene transformatie F van $\mathbb{R}^2$ die punt (x,y) op (x',y') afbeeldt wordt gegeven door twee vergelijkingen

$$F:\ \begin{cases} x' = p_1x + q_1y + r_1 \\ y' = p_2x + q_2y + r_2 \end{cases}$$

Nadat we over zijn gegaan op homogene coördinaten, kunnen dit met een matrixproduct ook schrijven als:

$$(\#)\qquad \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

waarin we F voorstellen door een homogene 3×3-matrix. Punt $(x_1 : x_2 : x_3)$ en zijn beeldpunt $(x_1' : x_2' : x_3')$ worden gerepresenteerd door de homogene 3×1-kolommatrices

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ resp. } \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix}.$$

In een homogene matrix mogen we alle getallen met eenzelfde getal $\neq 0$ vermenigvuldigen.

Het beeldpunt vinden we met een matrixproduct en we krijgen dan

$$\begin{cases} x_1' = p_1x_1 + q_1x_2 + r_1x_3 \\ x_2' = p_2x_1 + q_2x_2 + r_2x_3 \\ x_3' = x_3 \end{cases}$$

Het beeld van $(x : y : 1)$ is dus $(p_1x + q_1y + r_1 : p_2x + q_2y + r_2 : 1)$, precies zoals het hoort. Opdat de transformatie F omkeerbaar is, moeten we eisen dat

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} = p_1q_2 - p_2q_1 \neq 0.$$

We kunnen nu de affiene transformatie F op voor de hand liggende wijze uitbreiden tot de oneindige verre punten $(x_1 : x_2 : 0)$. Met $(\#)$ vinden we het beeldpunt

$$(x_1' : x_2' : 0) = (p_1x_1 + q_1x_2 : p_2x_1 + q_2x_2 : 0)\ .$$

We zien dat oneindig verre punten overgaan in oneindig verre punten. De oneindig verre lijn ℓ_∞ wordt door de tot $\mathcal{P}$ uitgebreide affiene transformatie F op zichzelf afgebeeld.

Hieruit volgt dat F een kegelsnede κ afbeeldt op een kegelsnede van hetzelfde type (ellips, parabool of hyperbool). Het type van κ wordt bepaald door het aantal oneindig verre punten dat op κ ligt.

De door (#) gedefinieerde transformatie F van $\mathcal{P}$ noemen we een *affiene* transformatie *van* $\mathcal{P}$. De affiene transformaties van $\mathcal{P}$ vormen een ondergroep van de projectieve transformaties van $\mathcal{P}$. Een affiene transformatie van $\mathcal{P}$ is een projectieve transformatie die ℓ_∞ op zichzelf afbeeldt. Twee figuren die elkaars beeld zijn bij een affiene transformatie van $\mathcal{P}$ heten *affien equivalent*. Ze hebben dezelfde affiene eigenschappen.

7. Projectieve transformaties van $\mathcal{P}$.

Een *projectieve* transformatie F van $\mathcal{P}$ wordt gedefinieerd door

$$(\#\#)\quad F: \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

De omkeerbaarheid van deze transformatie wordt gewaarborgd door de eis dat determinant van de 3×3-matrix van F niet gelijk aan 0 is:

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

De waarde van de determinant van een homogene matrix heeft geen betekenis. Belangrijk is alleen het feit of de determinant 0 of $\neq 0$ is. Als $p_3 = q_3 = 0$ en $r_3 \neq 0$, dan is F een affiene transformatie van $\mathcal{P}$.

De projectieve transformaties van $\mathcal{P}$ vormen een groep: de samenstelling van zulke transformaties is weer een projectieve transformatie en ook de inverse van zo'n transformatie is projectieve transformatie. Eigenschappen van een figuur in $\mathcal{P}$ die behouden blijven onder projectieve transformaties heten de *projectieve eigenschappen* van de figuur. Twee figuren die elkaars beeld zijn onder een projectieve transformatie heten *projectief equivalent*, ze hebben dezelfde projectieve eigenschappen. Is een projectieve eigenschap bewezen voor een bepaalde figuur, dan geldt hij ook voor alle projectief equivalente figuren.

Een projectieve transformatie van $\mathcal{P}$ is volledig bepaald door de beelden van 4 verschillende punten, waarvan er geen drie op één lijn liggen:

7.1 *Stelling*. Zijn A, B, C, D en A', B', C', D' twee viertallen punten in $\mathcal{P}$, elk met de eigenschap dat geen drie van de vier punten op één lijn liggen, dan is er precies één projectieve transformatie F van $\mathcal{P}$ zo dat $F(A) = A'$, $F(B) = B'$, $F(C) = C'$ en $F(D) = D'$.

[Voor een bewijs zie weer *Meetkunde en Algebra*.]

Een figuur die bestaat uit vier punten A, B, C, D, waarvan er geen drie op één lijn liggen, wordt een *volledige vierhoek* met *hoekpunten* A, B, C, D genoemd. De 6 verbindingslijnen AB, AC, BC, AD, BD en CD van steeds twee van deze *hoekpunten* heten de *zijden* van de vierhoek.

Stelling 7.1 zegt dat alle volledige vierhoeken in $\mathcal{P}$ projectief equivalent zijn. Alle volledige vierhoeken in $\mathcal{P}$ hebben dezelfde projectieve eigenschappen. Volledige vierhoeken zullen in het volgende een belangrijke rol spelen.

Hieronder enkele belangrijke projectieve eigenschappen van punten, lijnen en kegelsneden in $\mathcal{P}$.

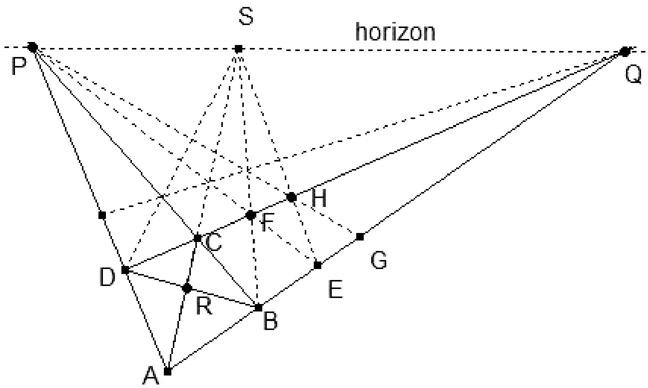
Bij een projectieve transformatie F worden lijnen op lijnen afgebeeld. Als $F(P) = P'$, $F(Q) = Q'$, dan wordt lijn PQ wordt afgebeeld op lijn $P'Q'$. De oneindig verre lijn ℓ_∞ met vergelijking $x_3 = 0$ speelt hierbij niet een speciale rol. Het beeld van een oneindig ver punt hoeft niet een oneindig ver punt te zijn. Het punt $(x_1 : x_2 : 0)$ wordt door F afgebeeld op $(p_1x_1 + q_1x_2 : p_2x_1 + q_2x_2 : p_3x_1 + q_3x_2)$. De oneindig verre lijn kan dus op een gewone lijn afgebeeld worden en is dan zelf het beeld van een gewone lijn. Alleen als $p_3 = q_3 = 0$ en $r_3 \neq 0$, dan is F een affiene transformatie van $\mathcal{P}$ en worden gewone punten op gewone punten afgebeeld en oneindig verre punten op oneindig verre punten, de oneindig verre lijn wordt dan op zichzelf afgebeeld.

Een niet-ontaarde kegelsnede gaat over in een niet-ontaarde kegelsnede, maar of de kegelsnede een ellips, parabool of hyperbool is, is geen projectieve eigenschap. Bij een projectieve transformatie F van $\mathcal{P}$ hoeft het aantal oneindig verre punten op het beeld $\kappa' = F(\kappa)$ niet gelijk te zijn aan het aantal oneindig verre punten op de oorspronkelijke kegelsnede κ.

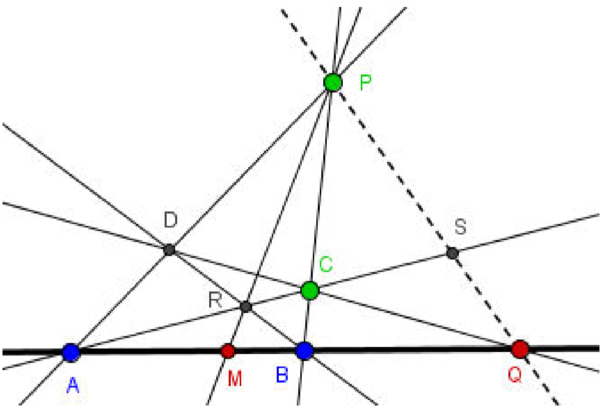
Dat een punt M het midden van lijnstuk AB is, is om meerdere redenen geen projectieve eigenschap. In $\mathbb{R}^2$ is $M = \frac{1}{2}(A + B) = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ het midden van lijnstuk AB, maar in $\mathcal{P}$ werkt dit niet. Met homogene coördinaten voor $A(a_1 : a_2 : a_3)$ en $B(b_1 : b_2 : b_3)$ is punt $M(\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}b_1 : \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}b_2 : \frac{1}{2}a_3 + \frac{1}{2}b_3)$ weliswaar een punt op lijn AB (dat volgt uit $\det(A, B, M) = 0$), maar dit punt wordt niet eenduidig bepaald door de *punten* A en B, maar door de toevallig gekozen *coördinaten* van A en B. Met homogene coördinaten geldt immers $A(a_1 : a_2 : a_3) = (2a_1 : 2a_2 : 2a_3)$ en $B(b_1 : b_2 : b_3) = (4b_1 : 4b_2 : 4b_3)$, maar het punt $N(a_1 + 2b_1 : a_2 + 2b_2 : a_3 + 2b_3)$ is niet hetzelfde punt als M. Wel kunnen we voor twee gewone punten A en B in $\mathcal{P}$ het begrip *lijnstuk AB* definiëren met behulp van de corresponderende punten in $\mathbb{R}^2$. Op zo'n lijnstuk liggen alleen gewone punten van $\mathcal{P}$. Ook het *midden M* van lijnstuk AB kunnen we zo definiëren. M is een gewoon punt dat ligt op lijnstuk AB. Als echter A of B (of beide) een oneindig ver punt is, dan is lijnstuk AB en ook het midden van dit lijnstuk niet gedefinieerd.

Bij een *projectieve* transformatie F van $\mathcal{P}$ die niet een affiene transformatie van $\mathcal{P}$ is, kunnen de begrippen 'lijnstuk' en 'midden' geen rol spelen, want onder zo'n F gaat ℓ_∞ over in een gewone lijn en ℓ_∞ is zelf het beeld van een gewone lijn. Dat een punt een gewoon resp. oneindig ver punt is, is geen projectieve eigenschap. Om deze reden zijn ook 'lijnstuk' en 'midden' in $\mathcal{P}$ geen projectieve eigenschappen.

Na een projectieve transformatie F ziet het beeld van een figuur die bestaat uit gewone punten en lijnen er i.h.a. uit als een perspectieftekening van de oorspronkelijke figuur. Het volgende plaatje kun je interpreteren als een perspectieftekening van een tegelvloer. Alle tegels zijn even grote rechthoeken. Het mogen ook parallellogrammen zijn. Evenwijdige lijnen snijden elkaar in hetzelfde oneindig verre punt. In de figuur is de horizon een gewone lijn die het beeld is van de oneindig verre lijn ℓ_∞ na een projectieve transformatie. Het beeldpunt van het midden van het oorspronkelijke lijnstuk AB komt bij deze transformatie terecht in het snijpunt M van lijn PR met lijn AB. In de projectieve meetkunde noemt men de punten M en Q *harmonisch geconjugeerd* t.o.v. A en B.



Dit recept kunnen we altijd toepassen om bij 3 verschillende punten A, B en Q op een gewone lijn een vierde punt M te vinden dat *harmonisch geconjugeerd* is met Q t.o.v. A en B. Zie de volgende figuur:



Neem een willekeurig punt P dat niet op lijn AB ligt en trek de lijnen PA en PB. Kies op lijn PB een willekeurig punt C dat niet samenvalt met P of B. Lijn QC snijdt lijn AP in D. Verder is R het snijpunt van AC en BD. M is dan het snijpunt van de lijnen PR en AB.

Net als in de vorige figuur kunnen we de lijn PQ weer opvatten als de beeldlijn van de oneindig verre lijn onder een projectieve transformatie F van $\mathcal{P}$. In de oorspronkelijke figuur zijn dan AD, CD en PR evenwijdig. Hetzelfde geldt voor de lijnen AB en CD. $ABCD$ is daarin dus een parallellogram en M is het midden van lijnstuk AB, als A en B gewone punten zijn.

Lijn QC is evenwijdig met lijn AB als we voor Q het oneindig verre punt van lijn AB nemen. Dan is ook lijn PQ evenwijdig met lijn AB. Ga na dat punt M dan het midden van lijnstuk AB is. Nemen we ook voor P een oneindig ver punt, dan is $ABCD$ een parallellogram en lijn PQ is de oneindig verre lijn.

Uit de constructie van M blijkt dat de eigenschap dat M en Q harmonisch geconjugeerd zijn t.o.v. A en B een projectieve eigenschap is. In de projectieve meetkunde wordt bewezen dat we altijd hetzelfde punt M krijgen, hoe we de punten P en C ook kiezen. Maken we deze figuur in *Geogebra* dan kunnen we dat zien door deze punten te verslepen. In het volgende nemen we aan:

7.2 *Stelling*. Bij twee verschillende punten A en B in $\mathcal{P}$ en een punt $Q \neq A, B$ op lijn AB hoort precies één vierde punt M op lijn AB dat *harmonisch geconjugeerd* is met Q t.o.v. A en B. Zijn A en B gewone punten en is Q het oneindig verre punt van lijn AB, dan is M het midden van lijnstuk AB.

[Voor bewijzen raadpleeg weer *Meetkunde en Algebra*.]

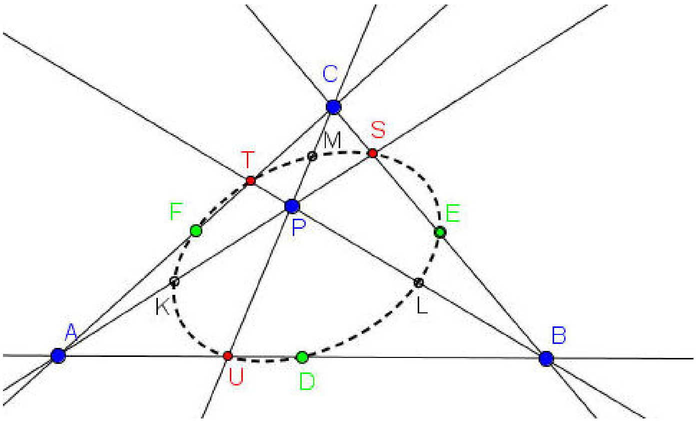
Sleep in *Geogebra* het punt Q ook eens naar een punt 'tussen' A en B of naar een punt 'links van' punt A. ['Ligt tussen' en 'ligt links van' zijn overigens geen projectieve eigenschappen!].

In de laatste figuur vormen A, B, C en D de *hoekpunten* van de volledige vierhoek $ABCD$. De lijnen AB, BC, CD, AD, AC en BD zijn de *zijden* van de vierhoek. Twee zijden die geen hoekpunt gemeen hebben vormen een paar *overstaande* zijden. De snijpunten van de 3 paren overstaande zijden worden de *diagonaalpunten* van de vierhoek genoemd. In de figuur zijn dat de punten P, Q en R. De drie verbindingslijnen PR, PQ en QR van de diagonaalpunten heten de *diagonalen* van de vierhoek. Volgens stelling 7.1 zijn alle volledige vierhoeken in $\mathcal{P}$ projectief equivalent.

Opmerking. In de terminologie van de volledige vierhoek $ABCD$ snijdt diagonaal PR zijde AB in een punt M dat harmonisch geconjugeerd is met het diagonaalpunt Q t.o.v. A en B. Algemener geldt: door elk diagonaalpunt gaan twee zijden z_1, z_2 en twee diagonalen d_1, d_2 van de vierhoek. Laat l een zijde zijn die niet door genoemd diagonaalpunt gaat. Dan zijn $z_1 \wedge l$ en $z_2 \wedge l$ twee hoekpunten en $d_1 \wedge l$ en $d_2 \wedge l$ zijn harmonisch geconjugeerd t.o.v. deze beide hoekpunten. Een van $d_1 \wedge l$ en $d_2 \wedge l$ is een diagonaalpunt.

Voorbeeld: Door Q gaan de zijden AB en CD en de diagonalen QR en QP. Deze lijnen snijden zijde AD in de hoekpunten A en D, het diagonaalpunt P en een vierde punt $AD \wedge QR$. De laatste twee punten zijn harmonisch geconjugeerd t.o.v. de beide hoekpunten A en D.

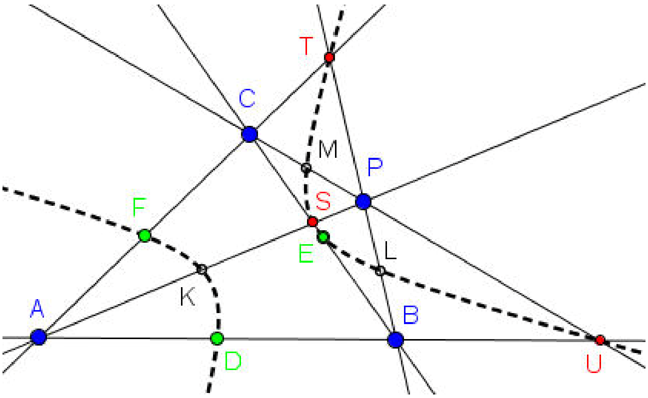
8. De negenpuntskegelsnede onder een projectieve transformatie.
Bekijk nu weer de figuur uit het begin van dit artikel:



Dit is een figuur in $\mathbb{R}^2$. D, E, F en K, L, M zijn middens van lijnstukken. We gaan over op homogene coördinaten. De figuur wordt daarmee een figuur in $\mathcal{P}$. De punten en lijnen in deze figuur zijn gewone punten resp. lijnen. Het midden D van lijnstuk AB is t.o.v. A en B harmonisch geconjugeerd met het oneindig verre punt van lijn AB. Het midden K van lijnstuk AP is t.o.v. A en P harmonisch geconjugeerd met het oneindig verre punt van lijn AP. Soortgelijk voor de middens E, F, L en M. Onder een projectieve transformatie F van $\mathcal{P}$ blijft geconjugeerdheid behouden. Duiden we $F(X)$ aan met X' en is lijn k het beeld van de oneindig verre lijn ℓ_∞, dan is D' op lijn $A'B'$ harmonisch geconjugeerd met snijpunt $A'B' \wedge k$ t.o.v. A' en B'. Evenzo is K' op lijn $A'P'$ harmonisch geconjugeerd met $A'P' \wedge k$ t.o.v. A' en P'. Idem voor E', F', L', M'. Snijpunten S, T, U gaan over in snijpunten S', T', U'. Dus kegelsnede κ door de middens D, E, F, K, L, M en de snijpunten S, T, U gaat onder F over in de kegelsnede κ' door D', E', F', K', L', M' en S', T', U'.

Omgekeerd: wanneer punten A', B', C' en P', waarvan er geen drie op één lijn liggen, gegeven zijn en een lijn k, die door geen van deze punten gaat, dan zijn er oneindig veel projectieve transformaties van $\mathcal{P}$ waarbij ℓ_∞ de beeldlijn is van k. Neem één zo'n transformatie F en kies A, B, C en P zo dat $F(A) = A'$, $F(B) = B'$, $F(C) = C'$ en $F(P) = P'$. Bij deze A, B, C en P worden op de bekende manier D, E, F en K, L, M als middens en S, T, U als snijpunten gedefinieerd. Dan liggen deze punten op de bij A, B, C en P behorende negenpuntskegelsnede κ. De beeldkegelsnede κ' gaat dan door de punten D', E', F', K', L', M' en S', T', U', waarvoor geldt dat D' op lijn $A'B'$ harmonisch geconjugeerd met snijpunt $A'B' \wedge k$ t.o.v. A' en B'. Evenzo is K' op lijn $A'P'$ harmonisch geconjugeerd met $A'P' \wedge k$ t.o.v. A' en P'. Idem voor E', F', L', M'. Snijpunten *S*, *T*, *U* gaan over in snijpunten S', T', U'.

In de laatste figuur is punt *P* binnen driehoek *ABC* getekend, maar dat is niet een projectieve eigenschap en dus niet relevant. *ABCP* is een volledige vierhoek en alle volledige vierhoeken in $\mathcal{P}$ zijn projectief equivalent. De volgende figuur is projectief equivalent met de vorige figuur.



Met andere letters en in iets andere bewoordingen, kunnen we nu de bewering van *Thomas Holgate* als volgt formuleren:

8.1 (*Holgate*) Stel *ABCP* is een volledige vierhoek in $\mathcal{P}$ en *k* is een lijn die niet door de hoekpunten van de vierhoek gaat. Neem op zijde *AB* het punt *D* dat harmonisch geconjugeerd is met $k \wedge AB$ t.o.v. de hoekpunten *A* en *B*. Op soortgelijke wijze kiezen we op de zijden *BC*, *CA*, *AP*, *BP* en *CP* de punten *E*, *F*, *K*, *L* resp. *M*. Verder zijn $S = AP \wedge BC$, $T = BP \wedge AC$ en $U = CP \wedge AB$ de diagonaalpunten van de vierhoek. Dan liggen de zes punten *D*, *E*, *F*, *K*, *L*, *M* en de drie diagonaalpunten *S*, *T* en *U* op een kegelsnede. Als *k* de oneindig verre lijn ℓ_∞ is, dan zijn *D*, *E*, *F*, *K*, *L*, *M* de middens van de lijnstukken *AB, BC*, *CA*, *AP*, *BP* en *CP*.

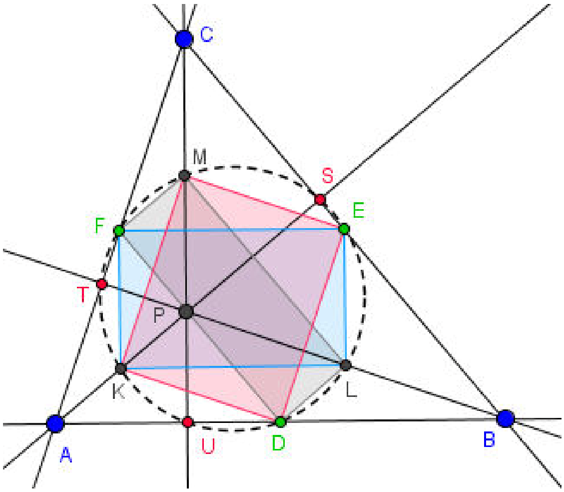
Definitie. De negenpuntskegelsnede van stelling 8.1 noemen we *de negenpuntskegelsnede die bepaald wordt door de volledige vierhoek ABCP en lijn k*.

Belangrijk is dat deze kegelsnede in stelling 8.1 alleen door projectieve eigenschappen wordt gekarakteriseerd. Merk verder op dat geen van de vier punten *A*, *B*, *C* en *P* in 8.1 een speciale rol speelt. Ook de volgorde van deze punten doet er niet toe. Met $k = \ell_\infty$ krijgen we weer de negenpuntskegelsnede bij vierhoek *ABCP* zoals we die eerdere paragrafen definieerden.

Opmerking. *D*, *E*, *F*, *K*, *L*, *M* zijn 6 verschillende punten, maar *S* kan bijv. samenvallen met *E* en dan raakt de kegelsnede in *E* aan zijde *BC*. Ook *U* kan samenvallen met *D* of *T* kan samenvallen met *F*.

9. De negenpuntscirkel.

De negenpuntskegelsnede in de vorige paragrafen is een generalisering van de negenpuntscirkel, die al langer bekend is. De drie hoogtelijnen van een driehoek ABC in $\mathbb{R}^2$ gaan door één punt P. De punten D, E, F en K, L, M zijn de middens van de lijnstukken AB, BC, CA en AP, BP, CP. Verder zijn S, T en U de voetpunten van de hoogtelijnen uit A, B resp. C. We weten dat een driehoek precies één *omgeschreven cirkel* heeft. Volgens het omgekeerde van de *stelling van Thales* valt het middelpunt van de omgeschreven cirkel van een rechthoekige driehoek samen met het midden van de hypotenusa. Met deze kennis is het eenvoudig te bewijzen dat de punten D, E, F, K, L, M op een cirkel liggen, die ook door S, T en U gaat. De stelling van Pascal hebben we hierbij niet nodig. De cirkel door deze negen punten heet de *negenpuntscirkel van driehoek ABC*. Zie de volgende figuur:



Onderwerpen we deze figuur aan een affiene transformatie van het vlak $\mathbb{R}^2$, dan blijven de affiene eigenschappen van de figuur behouden. Middens blijven middens, maar hoogtelijnen blijven i.h.a. niet hoogtelijnen, wel blijven ze door één punt gaan. De cirkel gaat over in een ellips. We breiden het vlak $\mathbb{R}^2$ uit met oneindig verre punten door over te gaan op homogene coördinaten. We krijgen dan het projectieve vlak $\mathcal{P}$. In vlak $\mathcal{P}$ zijn alle volledige vierhoeken projectief equivalent en ze hebben allemaal dezelfde projectieve eigenschappen als de volledige vierhoek $ABCP$ in de figuur hierboven. Onder een projectieve transformatie van $\mathcal{P}$ gaat vierhoek $ABCP$ over in een vierhoek $A'B'C'P'$ en de oneindig verre lijn ℓ_∞ gaat over in een lijn k. De negenpuntscirkel van driehoek ABC gaat hierbij over in de negenpuntskegelsnede die bepaald wordt door de volledige vierhoek $A'B'C'P'$ en lijn k.

Meer over **projectieve meetkunde** is te vinden in mijn boeken

Meetkunde en Algebra.

en

Elementaire Meetkunde

Zie http://www.rinsepoortinga.nl