Wat verstaan we onder elementaire meetkunde?

Er zijn veel boeken met de titel 'Elementaire Meetkunde'. Niet alle auteurs verstaan hieronder hetzelfde. Dit boek behandelt in de eerste 12 hoofdstukken de vlakke meetkunde in $\mathbb{R}^2$ en de ruimtemeetkunde in $\mathbb{R}^3$ met behulp van eenvoudige lineaire algebra.

De belangrijkste vlakke figuren zijn lijnen en met behulp van lijnen gedefinieerde figuren als lijnstukken, halve lijnen, hoeken, driehoeken, vierhoeken, etc. Van oudsher worden in de elementaire vlakke meetkunde ook cirkels behandeld. Meestal komen daar nog de kegelsneden bij. Vlakke figuren liggen in $\mathbb{R}^2$ of in een vlak van $\mathbb{R}^3$. In $\mathbb{R}^3$ komen we daarnaast ruimtelijke figuren als prisma's, piramiden, kegels en bollen tegen. De doorsnede van een ruimtelijke figuur met een vlak levert een vlakke figuur op. In $\mathbb{R}^3$ bestaat een kegel [of kegeloppervlak] met top O en de z-as als as uit de punten die liggen op lijnen door O die een vaste hoek met de z-as maken. Doorsnijden we zo'n kegel met vlakken die niet door O gaan, dan krijgen we ellipsen (waartoe we ook cirkels rekenen), hyperbolen of parabolen.

Door twee verschillende punten gaat precies één lijn. Een affiene deelruimte van $\mathbb{R}^2$ of $\mathbb{R}^3$ bevat minstens één punt en bevat met twee verschillende punten X en Y ook alle andere punten van lijn XY. Lijnen en vlakken zijn affiene ruimten met dimensie 1 resp. 2. Een verzameling die precies één punt bevat is een affiene deelruimte met dimensie 0. $\mathbb{R}^2$ is een 2-dimensionale en $\mathbb{R}^3$ is een 3-dimensionale affiene ruimte. We kunnen $\mathbb{R}$ als een 1-dimensionale affiene ruimte opvatten. Affiene afbeeldingen beelden affiene ruimten af op affiene ruimten met dezelfde of een lagere dimensie. Belangrijk zijn de omkeerbare affiene afbeeldingen, die affiene ruimten afbeelden op affiene ruimten van dezelfde dimensie. Zo'n afbeelding is een 1-1-correspondentie tussen twee affiene ruimten en we kunnen ons afvragen welke meetkundige eigenschappen corresponderende figuren gemeen hebben. Een omkeerbare afbeelding noemen we ook transformatie. Een transformatie die een verzameling V op zichzelf afbeeldt heet een transformatie van V.

Bij een affiene transformatie gaan lijnen over in lijnen en blijft evenwijdigheid van lijnen behouden, d.w.z. twee evenwijdige lijnen k en l worden afgebeeld op twee evenwijdige lijnen k' en l'. Dus parallellogrammen gaan over in parallellogrammen. Figuren die door een affiene transformatie in elkaar overgaan heten affien equivalent. Zulke figuren hebben dezelfde affiene eigenschappen. Zo zijn bijv. alle driehoeken affien equivalent. Een affiene eigenschap die geldt voor één driehoek geldt voor alle driehoeken. Afstanden, lengtes en loodrechte stand van lijnen blijven i.h.a. niet behouden onder affiene transformaties. Het beeld van een cirkel of een bol onder een affiene transformatie is een ellips resp. ellipsoïde. Wel blijven verhoudingen van drie verschillende punten op een lijn behouden onder een affiene transformatie. Als A, B en C op een lijn liggen en A', B' en C' zijn de beelden onder een affiene transformatie, dan liggen A', B' en C' ook op een lijn en $A'C' : B'C' = AC : BC$.

Een isometrische transformatie ofwel een congruentie is een affiene transformatie, waarbij afstanden behouden blijven. Algemener is een affiene transformatie een gelijkvormigheid, als daarbij alle afstanden met een vaste factor $c > 0$ vermenigvuldigd worden. Een affiene transformatie is een gelijkvormigheid, precies dan, wanneer ieder tweetal lijnen dat loodrecht op elkaar staat, wordt afgebeeld op een tweetal lijnen dat loodrecht op elkaar staat. Hierbij gaan cirkels en bollen over in cirkels resp. bollen. Drie verschillende punten A, B en C, die niet op een lijn hoeven te liggen, worden door een gelijkvormigheid afgebeeld op punten A', B' en C' zo dat $A'C' : B'C' = AC : BC$. Onder een gelijkvormigheid gaan hoeken over in even grote hoeken, i.h.b. gaan rechte hoeken over in rechte hoeken.

Als V en V' twee vlakken in $\mathbb{R}^3$ zijn die niet door O gaan, dan kunnen we de punten van vlak V vanuit O projecteren op de punten van vlak V'. Hierbij beelden we punt X af op het snijpunt X' van lijn OX met vlak X'. Probleem hierbij is dat dit niet altijd een 1-1-correspondentie tussen de vlakken V en V' oplevert. Als lijn OX evenwijdig is met vlak V', dan correspondeert met punt X in V niet een punt X' in V'. Omgekeerd: als X' een punt in vlak V' is zo dat lijn OX' evenwijdig is met vlak V, dan is er niet een punt X in V dat correspondeert met punt X' in V'. Dit probleem is op te lossen door $\mathbb{R}^3$ uit te breiden met *oneindig verre punten* en wel zo dat twee lijnen in $\mathbb{R}^3$ evenwijdig zijn precies dan, wanneer ze door hetzelfde oneindig verre punt gaan. Een lijn l in $\mathbb{R}^3$ die evenwijdig is met een vlak V snijdt dan het vlak V in een oneindig ver punt, namelijk het oneindig verre punt van alle lijnen in V die evenwijdig zijn met lijn l. De oneindig verre punten van de lijnen in V vormen de oneindig verre lijn van vlak V. Een vlak, uitgebreid met zijn oneindig verre lijn, wordt een projectief vlak genoemd. Twee vlakken in $\mathbb{R}^3$ zijn evenwijdig precies dan, wanneer ze dezelfde oneindig verre lijn hebben. De projectie vanuit O van het projectieve vlak V op het projectieve vlak V' is nu een omkeerbare afbeelding van het projectieve vlak V op het projectieve vlak V', waarbij lijnen worden afgebeeld op lijnen. De oneindig verre lijn van vlak V hoeft hierbij niet te corresponderen met de oneindig verre lijn van vlak V'. [Dit laatste is wel het geval als de vlakken V en V' evenwijdig zijn.] Verhoudingen $AC : BC$ van drie verschillende punten die op een lijn liggen blijven bij projectie i.h.a. niet behouden. Wel blijven onder een projectie dubbelverhoudingen $(ABCD)$ van vier verschillende punten op een lijn behouden. Zie de hoofdstukken 4 en 9.

Een punt X in $\mathbb{R}^2$ is een getallenpaar (x, y). Een punt X in $\mathbb{R}^3$ is een getallendrietal (x, y, z). Wanneer we $\mathbb{R}$ beschouwen als een lijn, dan noemen we een getal x ook wel een punt van $\mathbb{R}$. De term 'elementair' in de titel 'Elementaire Meetkunde' van dit boek slaat o.a. op het feit dat in de hoofdstukken 1 t/m 12 geen limieten gebruikt worden, dus ook niet eigenschappen die op limieten berusten, zoals continuïteit, differentieerbaarheid of integralen. De lengte van een cirkelboog kan niet gedefinieerd worden. In $\cos\alpha$ of $\sin\alpha$ stelt α dan ook niet een getal, maar een hoek voor.

Dit alles betekent dat we in de hoofdstukken 1 t/m 12 alleen maar gebruik maken van de volgende eigenschappen van de reële getallen.

De reële getallen kunnen we optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen volgens de bekende rekenregels. Als x en y twee verschillende reële getallen zijn, dan $x < y$ of $x > y$, maar niet beide. De reële getallen bevatten de getallen 0 en 1, waarvoor geldt $0 < 1$. Als $x > 0$, dan is x positief. Als $x < 0$, dan is x negatief. Als $x < y$, $y < z$, dan $x < z$. Als $x < y$, dan $x + z < y + z$. Als $x < y$ en $z > 0$, dan $x \cdot z < y \cdot z$. Kortom $\mathbb{R}$ is met deze bewerkingen en ordening een wiskundige structuur, die bekend staat als een *geordend lichaam*. $\mathbb{R}$ bevat ook kleinere deellichamen met deze eigenschappen. Bijv. $\mathbb{Q}$, de verzameling van de rationale getallen, is zo'n deellichaam. Een flink deel van de stellingen in de hoofdstukken 1 t/m 12 behoudt zijn geldigheid, wanneer we overal $\mathbb{R}$ zouden vervangen door $\mathbb{Q}$.

Dat is niet meer het geval bij stellingen die betrekking hebben op lengtes of afstanden. Voor de definitie en berekening van afstanden hebben we wortels nodig. De afstand $|AB|$ van twee punten $A(a_1, a_2)$ en $B(b_1, b_2)$ wordt gedefinieerd door

$$|AB| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}\ .$$

In $\mathbb{R}^3$ wordt $|AB|$ voor punten $A(a_1, a_2, a_3)$ en $B(b_1, b_2, b_3)$ gegeven door

$$|AB| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}\ .$$

Als $x, y \geq 0$, dan $y = \sqrt{x} \iff y^2 = x$.

Een deelverzameling L van $\mathbb{R}$ met de volgende eigenschappen heet een *euclidisch deellichaam* van $\mathbb{R}$:

(i) L bevat de getallen 0 en 1.

(ii) Als $x, y \in L$, dan ook behoren ook $x + y$, $x - y$, $x \cdot y$ tot L.

(iii) Als $x, y \in L$ en $y \neq 0$, dan behoort ook x / y tot L.

(iv) Als $x \in L$ en $x > 0$, dan behoort ook $\sqrt{x}$ tot L.

Ieder deellichaam van $\mathbb{R}$ is automatisch geordend door de ordening $'<'$ van $\mathbb{R}$.

We definiëren $\mathbb{K}$ als het kleinste euclidische deellichaam van $\mathbb{R}$. Ga na dat in ieder geval $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$ [d.w.z. $\mathbb{Q}$ is een deelverzameling van $\mathbb{K}$]. Maar $\mathbb{K}$ valt niet samen met $\mathbb{Q}$. Bijv. $\sqrt{2}$ is niet een rationaal getal. $\mathbb{K}$ valt ook niet samen met $\mathbb{R}$, maar dat is wat moeilijker te bewijzen. Bijv. $\sqrt[3]{2}$ hoort niet tot $\mathbb{K}$. [Maar wel hoort $\sqrt[4]{2}$ tot $\mathbb{K}$, want $\sqrt{2}$ is positief en $\sqrt[4]{2} = \sqrt{\sqrt{2}}$.]

Er geldt:

$$x \in \mathbb{K} \iff x \text{ behoort tot ieder euclidisch deellichaam van } \mathbb{R}.$$

$\mathbb{K}$ wordt gekarakteriseerd door:

$x \in \mathbb{K} \iff$ er is een rij $r_1, r_2, ..., r_n$ van getallen in $\mathbb{R}$ zo dat $x = r_n$ en voor ieder getal r_k in de rij geldt

$r_k \in \mathbb{Q}$ of $r_k = r_i + r_j$, met $i, j < k$, of $r_k = r_i \cdot r_j$, met $i, j < k$,

of $r_k = 1/r_i$, met $i < k,\ r_i \neq 0$, of $r_k = \sqrt{r_i}$, met $i < k$ en $r_i > 0$.

Hieruit blijkt dat $\mathbb{K}$, in tegenstelling tot $\mathbb{R}$, een aftelbaar aantal getallen bevat. De positieve getallen in $\mathbb{K}$ zijn de reële getallen die de lengte voorstellen van een lijnstuk, dat met behulp van passer en liniaal in een eindig aantal stappen construeerbaar is, wanneer een lijnstuk met lengte 1 gegeven is. Al sinds de Griekse Oudheid gelden voor zulke constructies bepaalde regels. Bij de klassieke passer- en liniaalconstructies mag de liniaal alleen maar gebruikt worden om een lijn door twee gegeven of reeds eerder geconstrueerde punten te trekken, de liniaal bevat geen maatindeling. De passer mag alleen gebruikt worden om een cirkel te tekenen met een gegeven of reeds eerder geconstrueerd punt als middelpunt en met een straal die gelijk is aan de afstand van twee gegeven of eerder geconstrueerde punten. Ook de passer bevat geen maatindeling. We noemen de getallen in $\mathbb{K}$ de *construeerbare getallen*. $\mathbb{K}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{K}\}$ is dan het *construeerbare vlak* en $\mathbb{K}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{K}\}$ is de *construeerbare ruimte*.

Alle stellingen in de hoofdstukken 1 t/m 12 behouden hun geldigheid, wanneer we overal $\mathbb{R}$ zouden vervangen door $\mathbb{K}$. We noemen de meetkunde in deze hoofdstukken daarom 'elementaire' meetkunde.

In de hoofdstukken 13 en 14 van dit boek schetsen we nog wat er mogelijk is, wanneer we alle eigenschappen van de reële getallen mogen benutten. We bedrijven dan meetkunde met behulp van begrippen en methoden uit de Analyse. Dit is Analytische Meetkunde in de ware zin van het woord.

Rinse Poortinga

Elementaire meetkunde

1 Het vlak $\mathbb{R}^2$

We gaan uit van een vlak, waarin ieder punt X voorzien is van een uniek coördinatenpaar (x, y) met $x, y \in \mathbb{R}$. Na het invoeren van coördinaten vatten we dit vlak op als de verzameling die bestaat uit de getallenparen (x, y) met $x, y \in \mathbb{R}$. M.a.w. we identificeren het vlak met $\mathbb{R}^2$. De elementen van $\mathbb{R}^2$ noemen we *punten*. De eerste en de tweede coördinaat van een punt wordt de x-*coördinaat* resp. y-*coördinaat* van dat punt genoemd. De *x-as* bestaat uit de punten $(x,0)$, de *y-as* bestaat uit de punten $(0, y)$. De x-as en de y-as heten de *coördinaatassen* van $\mathbb{R}^2$. We stellen ons de x-as voor als een horizontale lijn en de y-as als een verticale lijn. De x-as en y-as snijden elkaar in het punt O met coördinaten $(0,0)$. O heet de *oorsprong* van het assenstelsel. Punten duiden we aan met hoofdletters en het is dan vaak handig om de bijbehorende coördinaten aan te duiden met de corresponderende kleine letters voorzien van indices 1 en 2. Dat geeft notaties als $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, …, $X(x_1, x_2)$, etc.

1.1 Lineaire afbeeldingen en determinanten.

De *lineaire bewerkingen* van $\mathbb{R}^2$ zijn de *coördinaatsgewijze optelling*:

$$X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

en het *scalair product* $tX = (tx_1, tx_2)$ van een getal $t \in \mathbb{R}$ en een punt X. Met deze lineaire bewerkingen is $\mathbb{R}^2$ een *tweedimensionale lineaire ruimte*. De *standaardbasis* van $\mathbb{R}^2$ is (E_1, E_2) met $E_1(1,0)$ en $E_2(0,1)$.

Definitie. Een *lineaire afbeelding* L van $\mathbb{R}^2$ naar zichzelf wordt gegeven door

$$L(X) = x_1P + x_2Q .$$

Ga na dat $P = L(E_1)$ en $Q = L(E_2)$. We noteren L ook als $L = [P,Q]$ of met een 2×2 -matrix als

$$L = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{bmatrix}.$$

In de eerste kolom van de matrix staan de coördinaten van P onder elkaar en in de tweede kolom de coördinaten van Q. Verder geldt $L(X+Y) = L(X) + L(Y)$ en $L(tX) = tL(X)$, d.w.z. L respecteert de lineaire bewerkingen. I.h.b. geldt $L(O) = O$.

Zijn $M = [A, B]$ en $L = [P, Q]$ lineaire afbeeldingen van $\mathbb{R}^2$, dan wordt de samenstelling $M \circ L$ gedefinieerd door

$$(M \circ L)(X) = M(L(X)).$$

Eerst wordt L uitgevoerd, daarna M. $M \circ L$ is weer een lineaire afbeelding van $\mathbb{R}^2$.

Ga na dat

$$M \circ L = [M(P), M(Q)] = [p_1 A + p_2 B, q_1 A + q_2 B].$$

Ook $L \circ M$ is een lineaire afbeelding [van $\mathbb{R}^2$, maar dat zeggen we er voortaan meestal niet meer bij]. Ga na dat i.h.a. $M \circ L \neq L \circ M$.

De *determinant* van $L = [P, Q]$ wordt genoteerd als $\det(L)$ en ook als

$$\det(P, Q) \text{ of als } \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix},$$

met de coördinaten van P en Q tussen verticale strepen.

Definitie. $\det(L) = \det(P, Q) = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} = p_1 q_2 - p_2 q_1$.

Toon aan: $\det(P + R, Q) = \det(P, Q) + \det(R, Q)$,
$\det(tP, Q) = t \cdot \det(P, Q)$ en
$\det(Q, P) = -\det(P, Q)$.
Als $P \neq O$, dan $\det(P, Q) = 0 \Leftrightarrow Q = tP$ voor zekere t.

Als $\det(P, Q) = 0$, dan noemen we P en Q *lineair afhankelijk*. Dat betekent dat P en Q op een lijn door O liggen. Als $\det(P, Q) \neq 0$, dan zijn P en Q *lineair onafhankelijk*.

1.1.1 Als $M = [A, B]$ en $L = [P, Q]$ lineaire afbeeldingen zijn, dan
$\det(M \circ L) = \det(M) \cdot \det(L)$.

Bewijs. $\det(M \circ L) = \det(M(P), M(Q)) = \det(p_1 A + p_2 B, q_1 A + q_2 B)$. Uitwerken met bovengenoemde rekenregels geeft

$$\det(M \circ L) = (p_1 q_2 - p_2 q_1) \cdot \det(A, B) = \det(P, Q) \cdot \det(A, B).$$