Analyse + Meetkunde

op de lijn en in het vlak

Voorwoord

Dit boek behandelt de belangrijkste begrippen en methoden uit de analyse van 'functies van één variabele' en de analytische vlakke meetkunde als een samenhangend geheel. Begrippen en methoden, waarmee we op school op min of meer intuïtieve wijze kennis hebben gemaakt, worden in dit boek op een wiskundig verantwoorde manier van de grond af aan opnieuw opgebouwd. Een belangrijk doel is het zelf leren bewijzen door kennis te maken met de gangbare bewijsmethoden. De focus is hier meer op de theoretische structuur van genoemde wiskundegebieden gericht dan op praktisch rekenwerk en concrete toepassingen. Elementaire rekenvaardigheid m.b.t. algebraïsche formules, exponentiële, logaritmische en goniometrische functies, differentiëren en integreren en enige kennis van de schoolmeetkunde wordt bekend verondersteld. Hoofdstuk 1 geeft een korte samenvatting van de begrippen en notaties die niet tot de vwo-stof behoren, maar die wel nodig zijn voor een goed begrip van de volgende hoofdstukken.

Hoofdstukken:

1. Basisbegrippen
2. De getallenlijn
3. Limieten, continuïteit en afgeleide
4. Integralen
5. De eenheidscirkel en goniometrie
6. Vlakke meetkunde
7. Cirkels, driehoeken en transformaties van het platte vlak
8. Primitieven en Riemannsommen
9. Hogere afgeleiden
10. Krommen en oppervlakte

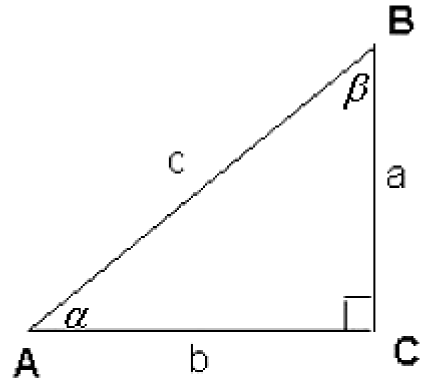
Kennis van deze onderwerpen is noodzakelijk voor iedereen die een exact vak studeert op universitair bachelorniveau. Als voorkennis is in principe wiskunde B op vwo-niveau voldoende.

IJlst, oktober 2011 Rinse Poortinga

Inhoud

5 De eenheidscirkel en goniometrie

5.1 Sinus, cosinus en tangens.
Op school zijn we de goniometrische functies sinus, cosinus en tangens voor het eerst tegengekomen in een meetkundige context. Goniometrie betekent letterlijk hoekmeting. In de rechthoekige driehoek ABC hiernaast geldt de stelling van Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$. Het omgekeerde geldt ook: als $a^2 + b^2 = c^2$, dan $\angle C = 90^\circ$. Er geldt:



$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}},$$
$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}},$$
$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}}$$

en natuurlijk $\cos\beta = \frac{a}{c}$, $\sin\beta = \frac{b}{c}$ en $\tan\beta = \frac{b}{a}$. We merken op dat $\beta = 90^\circ - \alpha$, want de hoeken van een driehoek zijn samen 180°. Hieruit blijkt:

$$\boxed{\begin{aligned} &\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha, \\ &\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha, \\ &\tan(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\tan\alpha}. \end{aligned}}$$

Twee hoeken die samen 90° zijn, noemen we elkaars *complement*. De co-sinus van α is eigenlijk de sinus van het complement van α : $\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$.

Om dezelfde reden wordt $\frac{1}{\tan\alpha}$ ook wel de *cotangens* van α genoemd:

$\operatorname{cotan}\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \tan(90^\circ - \alpha)$. Er geldt $\boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$.

We zien de stelling van Pythagoras terug in $\boxed{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1}$.
[We schrijven $\cos^2\alpha$ i.p.v. $(\cos\alpha)^2$ en analoog $\sin^2\alpha$.]

Vermenigvuldigen we de zijden van $\triangle ABC$ met een factor $r > 0$, dan blijven $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ en $\tan\alpha$ gelijk.

Als $a = 0$, dan hebben we geen driehoek meer en $c = b$. Het ligt voor de hand om $\sin 0^\circ = \tan 0^\circ = 0$ en $\cos 0^\circ = 1$ te stellen. Willen we dat bovenstaande formules voor $90^\circ - \alpha$ blijven gelden als $\alpha = 0^\circ$, dan moeten we definiëren $\sin 90^\circ = 1, \cos 90^\circ = 0$; $\tan 90^\circ$ bestaat niet.

Opgave. Ga met behulp van een gelijkzijdige driehoek *ABC*, met daarin hoogtelijn *CD*, na dat $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $\tan 30^\circ = \frac{1}{3}\sqrt{3}, \tan 60^\circ = \sqrt{3}$. Toon ook aan dat $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ en $\tan 45^\circ = 1$.

Het is de gewoonte om in ΔABC (de grootte van) de hoeken bij *A*, *B* en *C* aan te duiden met α, β resp. γ en (de lengten van) de zijden tegenover deze hoeken met *a*, *b* en *c*.

5.2 Cosinusregel, sinusregel en oppervlakteformule.

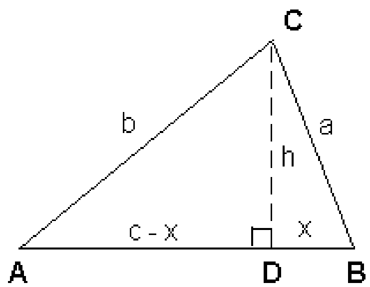
Cosinusregel: in ΔABC geldt: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$.

Bewijs. In de figuur hiernaast geldt volgens Pythagoras:

$b^2 = (c-x)^2 + h^2$ en $h^2 = a^2 - x^2$, dus

$b^2 = (c-x)^2 + a^2 - x^2 = a^2 + c^2 - 2cx$

$= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$, want $\cos\beta = \dfrac{x}{a}$.



Verwisselen van letters geeft ook

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ en

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

In driehoek ΔABC geldt $\sin\beta = \dfrac{h}{a}$, dus $h = a\sin\beta$. De oppervlakte van deze driehoek is $\frac{1}{2} \cdot \text{basis} \times \text{hoogte} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h = \frac{1}{2} ac\sin\beta$. Door verwisselen van letters krijgen we:

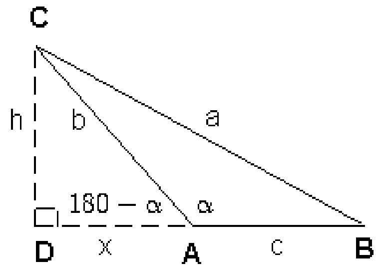
Oppervlakteformule. opp. $\Delta ABC = \frac{1}{2} ac\sin\beta = \frac{1}{2} ab\sin\gamma = \frac{1}{2} bc\sin\alpha$.

De sinusregel $\boxed{\dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\beta}{b} = \dfrac{\sin\gamma}{c}}$ volgt uit de oppervlakteformule.

Deze bewijzen gaan alleen op voor een ΔABC waarin het voetpunt *D* van hoogtelijn *CD* op zijde *AB* ligt. Als $\beta = 90^\circ$, dan $x = 0$ en $\cos\beta = 0$, dus $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ wordt $b^2 = a^2 + c^2$. We krijgen dan de stelling van Pythagoras als speciaal geval van de cosinusregel. Omgekeerd: als $b^2 = a^2 + c^2$, dan $\cos\beta = 0$ en $\beta = 90^\circ$. Ook de oppervlakteformule klopt voor een rechthoekige driehoek, want $\sin 90^\circ = 1$.

Opdat de cosinusregel en oppervlakteformule ook voor een stomphoekige driehoek als hiernaast blijft gelden definiëren we $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$.

Voor $\alpha = 0^0$ geeft dit $\cos 180^\circ = -\cos 0^\circ = -1$. Verder stellen we $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$. Voor $\alpha = 0^0$ geeft dit $\sin 180^\circ = \sin 0^\circ = 0$. Met deze definities gelden de cosinusregel $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ en de oppervlakte- formule opp. $\Delta ABC \ = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$, als $0 \le \alpha \le 180^\circ$. Toon dit aan. Twee hoeken die samen 180° zijn heten elkaars *supplement*.

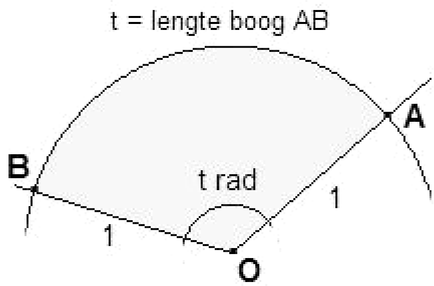


5.3 De symmetrieën van de eenheidscirkel. Lijnen en cirkels beschouwen we als verzamelingen waarvan de elementen punten zijn. Een verzameling punten in $\mathbb{R}^2$ noemen we ook wel een *figuur*. Een afbeelding van $\mathbb{R}^2$ op zichzelf waarbij afstanden behouden blijven wordt een *congruentieafbeelding* of kortweg een *congruentie* genoemd. Zo'n afbeelding beeldt een lijnstuk af op een even lang lijnstuk, een cirkelboog op een even - lange cirkelboog en een driehoek op een daarmee congruente driehoek. Voorbeelden van congruenties zijn translaties, rotaties, en spiegelingen. Het na elkaar uitvoeren van congruenties levert weer een congruentie op. Een congruentie is omkeerbaar en de inverse afbeelding is ook weer een congruentie. Een congruentie die een figuur op zichzelf afbeeldt noemen we een symmetrieafbeelding of kortweg *symmetrie* van die figuur. Bij een *spiegeling* met lijn ℓ als *spiegelas* wordt elk punt op ℓ op zichzelf afgebeeld. Liggen de punten *P* en *Q* niet op ℓ, dan zijn *P* en *Q* elkaars *spiegelbeeld* t.o.v. ℓ precies dan, wanneer ℓ de *middelloodlijn* van lijnstuk *PQ* is.

Het gaat ons hier om de symmetrieën van de *eenheidscirkel* met straal 1 en middelpunt *O*. Op de eenheidscirkel liggen de punten die voldoen aan de vergelijking $x^2 + y^2 = 1$. We gebruiken het symbool $\mathbb{E}$ voor de eenheidscirkel, $\mathbb{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Iedere middellijn van $\mathbb{E}$ is een *symmetrieas* van de eenheidscirkel, d.w.z. een spiegeling t.o.v. een lijn door *O* beeldt de eenheidscirkel op zichzelf af. Zijn *P* en *Q* twee punten op $\mathbb{E}$, dan zijn *P* en *Q* elkaars spiegelbeeld bij de spiegeling t.o.v. de middelloodlijn van lijnstuk *PQ*. Deze middelloodlijn gaat door *O*. [Als $P = Q$, dan is middellijn $OP\ (= OQ)$ de spiegelas.] Het samenstellen van twee spiegelingen t.o.v. lijnen door *O* geeft een *rotatie* om *O*, waarbij de eenheidscirkel op zichzelf wordt afgebeeld. Als *P* en *Q* twee punten op de eenheidscirkel zijn, dan is er precies één rotatie om *O* waarbij *Q* het rotatiebeeld is van *P*. Als $P = Q$, dan is deze rotatie de identieke afbeelding, die ieder punt op zichzelf afbeeldt. Als $P \neq Q$, dan kan deze rotatie tot stand worden gebracht door eerst te spiegelen met spiegelas *OP* en daarna met de middelloodlijn van lijnstuk *PQ* als spiegelas [maak een tekening!]. Iedere symmetrie van de eenheidscirkel is een spiegeling t.o.v. een lijn door *O* of een rotatie om *O*. De symmetrieën van $\mathbb{E}$ vormen een groep met het samenstellen van afbeeldingen als groepsbewerking. Deze groep heet de *symmetriegroep* van $\mathbb{E}$. De rotaties om *O* vormen een ondergroep van deze symmetriegroep.

Opmerking. Er is precies één rotatie om O die punt $E_1(1,0)$ afbeeldt op punt $E_2(0,1)$. Of er een kwartslag tegen de klok in gedraaid is of driekwartslag met de klok mee doet er niet toe. Wie alleen op het eindresultaat let ziet geen verschil. Twee afbeeldingen F en G met gemeenschappelijk domein D zijn gelijk precies dan, wanneer $F(X)=G(X)$ voor iedere $X \in D$.

5.4 Radialen.



Op school is op een gegeven moment met behulp van de eenheidscirkel een nieuwe hoekmaat ingevoerd, waarbij hoeken worden gemeten in *radialen* i.p.v. graden. Is $\angle AOB$ een hoek met hoekpunt O en benen OA en OB met A en B op de eenheidscirkel, terwijl in graden $0^\circ < \angle AOB < 180^\circ$, dan stellen we de grootte van $\angle AOB$ in radialen gelijk aan de lengte van de *cirkelboog AB* die binnen $\angle AOB$ ligt, d.w.z. we nemen lengte van de kortste van de beide cirkelbogen met eindpunten A en B. Hoe we de lengte van een cirkelboog definiëren en berekenen gaan we later bekijken. We nemen aan dat bij een spiegeling van de eenheidscirkel t.o.v. een lijn door O een cirkelboog (van $\mathbb{E}$) en zijn spiegelbeeld dezelfde lengte hebben. Rotatie om O komt neer op 2 keer spiegelen t.o.v. een lijn door O, dus ook bij een rotatie verandert de lengte van een cirkelboog niet. We hebben geleerd dat de omtrek van een cirkel met straal r gelijk is aan $2\pi r$, dus een lijn door O verdeelt $\mathbb{E}$ in twee even lange cirkelbogen, ieder met lengte π. Zijn A en B twee verschillende punten op de $\mathbb{E}$, dan noemen we lijnstuk AB een *koorde* van $\mathbb{E}$. Liggen A en B op een lijn door O dan is lijnstuk AB en ook lijn AB een *middellijn* van $\mathbb{E}$. Is AB geen middellijn, dan hoort bij koorde AB precies één boog AB met een lengte kleiner dan π en de grootte van $\angle AOB$ in radialen is dan gelijk aan de lengte van deze boog. Als grensgevallen stellen we de grootte van $\angle AOB$ op 0 radialen, wanneer $A=B$ en op π radialen wanneer AB een *middellijn* van $\mathbb{E}$ is.

Voor het omrekenen van graden naar radialen en omgekeerd gebruiken we de omrekenformule $\boxed{180^\circ = \pi \text{ rad}}$. Bijvoorbeeld

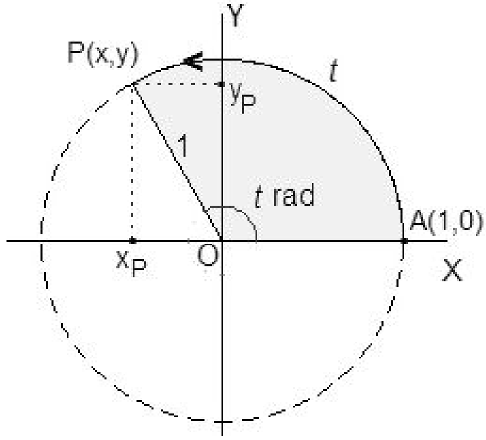
$$90^\circ = \tfrac{1}{2}\pi \text{ rad},\ 45^\circ = \tfrac{1}{4}\pi \text{ rad},\ 30^\circ = \tfrac{1}{6}\pi \text{ rad},\ 60^\circ = \tfrac{1}{3}\pi \text{ rad etc.}$$

Verder $1^\circ = \dfrac{\pi}{180}\text{rad}$ en $1\text{ rad} = \dfrac{180^\circ}{\pi}$.

Een *gestrekte hoek* is een hoek van π radialen en een *rechte hoek* is een hoek van $\tfrac{1}{2}\pi$ radialen.

5.5 Cosinus en sinus als functies met domein $\mathbb{R}$.

Nog iets later in onze schoolcarrière zijn we de sinus, cosinus en tangens gaan opvatten als functies met domein $\mathbb{R}$. De t in $\cos t$ resp. $\sin t$ stelt dan een reëel getal voor dat niet noodzakelijk geassocieerd is met een hoek. Om dit te motiveren gaan we in eerste instantie meetkundig te werk. Bekijk de figuur hiernaast. Is $P(x_P, y_p)$ een punt op de bovenste helft van de eenheidscirkel, dan is $y_P \geq 0$ en $\angle AOP$ met $A = E_1(1,0)$ is een hoek van t radialen, wanneer boog AP de lengte t heeft. Er geldt $0 \leq t \leq \pi$. Boog AP is de boog die doorlopen wordt als we over de cirkel van A naar P gaan tegen de wijzers van de klok in. We definiëren nu voor het *getal* $t \in [0, \pi]$ de cosinus en sinus d.m.v. $\cos t = x_P$ en $\sin t = y_P$. Als $t \in \langle -\pi, 0\rangle$, dan nemen we punt $P(x_P, y_P)$ op het deel van $\mathbb{E}$ dat onder de x-as ligt. Dan ligt ook de bijbehorende cirkelboog AP (met uitzondering van punt A) onder de x-as en we kiezen P zodanig dat $|t|$ de lengte van boog AP is. Boog AP wordt doorlopen wanneer we met de wijzers van klok mee over de cirkel van A naar P gaan. We stellen weer $\cos t = x_P$ en $\sin t = y_P$. Daarmee zijn $\cos t$ en $\sin t$ nu gedefinieerd voor $t \in \langle -\pi, \pi]$. Er geldt $\boxed{\cos(-t) = \cos t}$ en $\boxed{\sin(-t) = -\sin(t)}$. Verder $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, want voor een punt $(x, y) \in \mathbb{E}$ geldt $x^2 + y^2 = 1$. We definiëren de tangens d.m.v. $\tan t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$ voor waarden van $t \in \langle -\pi, \pi]$ zo dat $\cos t \neq 0$.



Voorbeeld. In de figuur hiernaast geldt (in radialen): $\angle AOP = t$, $\angle AOQ = u$, dus $\angle POQ = t - u$. Verder

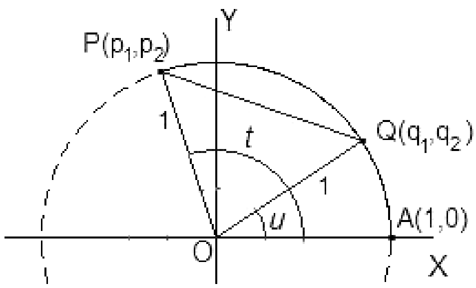
$(p_1, p_2) = (\cos t, \sin t)$,

$(q_1, q_2) = (\cos u, \sin u)$,

met $p_1^2 + p_2^2 = 1, q_1^2 + q_1^2 = 1$.

In ΔPOQ geeft de cosinusregel

$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2 \cdot OP \cdot OQ \cdot \cos(t - u)$.



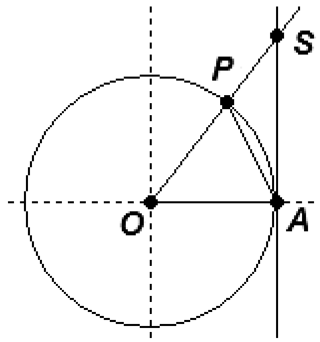
Ga na dat het linkerlid gelijk is aan $2 - 2(p_1 q_1 + p_2 q_2)$ en dat het rechterlid zich laat herleiden tot $2 - 2\cos(t-u)$, zodat $\cos(t-u) = p_1 q_1 + p_2 q_2 = \cos t \cos u + \sin t \sin u$. Hiermee is de verschilformule $\boxed{\cos(t-u) = \cos t \cdot \cos u + \sin t \cdot \sin u}$ bewezen voor het geval dat $0 < u < t < \pi$. Uit de figuur blijkt verder dat $\cos t > 0$ voor $t \in [0, \frac{1}{2}\pi\rangle$ en dat $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$.

We hebben geleerd dat de oppervlakte van een cirkel met straal r gelijk is aan πr^2, dus de oppervlakte van de eenheidscirkel is π. Zijn A en B punten op $\mathbb{E}$ zo dat de lengte van boog AB gelijk is aan t met $t \in \langle 0, \pi \rangle$, dan is de oppervlakte van de *cirkelsector* begrensd door boog AB en de beide stralen OA en OB gelijk aan

$$\frac{t}{\text{omtrek}\,\mathbb{E}} \cdot (\text{opp. } \mathbb{E}) = \frac{t}{2\pi} \cdot \pi = \tfrac{1}{2} t .$$

We gaan nu na dat

$$\boxed{\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1}.$$



Neem daartoe punt $P(x, y)$ met $x, y > 0$ op $\mathbb{E}$. De lijn OP snijdt de verticale lijn $x = 1$ in het punt S. AS is de raaklijn aan de eenheidscirkel in punt $A(1,0)$. Vergelijken we de oppervlakten van ΔOAP, ΔOAS en de cirkelsector begrensd door de stralen OA, OP en boog AP, dan zien we dat

$$\text{opp. } \Delta OAP \le \text{opp.sector} \le \text{opp. } \Delta OAS .$$

[Als $V \subset W$, dan opp. $V \le$ opp. W wanneer de figuren V en W een oppervlakte hebben.] Dat betekent dat $\frac{1}{2} \cdot \sin t \le \frac{1}{2} t \le \frac{1}{2} \cdot \tan t$ ofwel $1 \le \dfrac{t}{\sin t} \le \dfrac{1}{\cos t}$ met $t \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$.

Hieruit volgt $\displaystyle\lim_{t \to 0^+} \frac{t}{\sin t} = 1$ en dus ook $\displaystyle\lim_{t \to 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1$. Met $\sin(-t) = -\sin t$ vinden we dan $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$.

Om tenslotte $\cos t$ en $\sin t$ te definiëren voor iedere $t \in \mathbb{R}$ gaan we als volgt te werk: we stellen $\cos t = \cos u$ en $\sin t = \sin u$, wanneer $t = u \mod 2\pi$. Dit laatste betekent dat er een getal $k \in \mathbb{Z}$ is zo dat $t = u + k \cdot 2\pi$ ofwel $t - u = k \cdot 2\pi$. Bij iedere $t \in \mathbb{R}$ is er precies één $u \in \langle -\pi, \pi]$ zo dat $t = u \mod 2\pi$. Hiermee worden de cosinus en de sinus periodieke functies met periode 2π (= omtrek eenheidscirkel) met domein $\mathbb{R}$. Met $k \in \mathbb{Z}$ geldt $\cos(t + k \cdot 2\pi) = \cos t$ en $\sin(t + k \cdot 2\pi) = \sin t$. We definiëren de tangens weer d.m.v. $\tan t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$ voor waarden van $t \in \mathbb{R}$ zo dat $\cos t \ne 0$.

Voorbeeld. Een punt P beweegt zich over een cirkel in positieve draairichting, wanneer P tegen de wijzers van de klok in beweegt. De negatieve draairichting over de cirkel gaat met de klok mee. Wanneer punt $P(x_P, y_P)$ zich vanuit punt $A(1,0)$ in positieve draairichting over een afstand $t \ge 0$ over de eenheidcirkel bewogen heeft, dan $\cos t = x_P$ en $\sin t = y_P$. Punt P kan hierbij meerdere keren de cirkel rond geweest zijn. Als bijv. $t = 5\frac{1}{2}\pi$, dan bevindt P zich in punt $(0, -1)$ [2 keer rond en daarna nog driekwart cirkel verder, alles tegen de klok in vanuit A].

Wanneer punt $P(x_P, y_P)$ zich vanuit punt $A(1,0)$ in negatieve draairichting over een afstand $t \geq 0$ over de eenheidscirkel bewogen heeft, dan $\cos(-t) = x_P$ en $\sin(-t) = y_P$. Als bijv. P zich over een afstand $t = 3\frac{2}{3}\pi$ in negatieve draairichting vanuit A over de cirkel bewogen heeft, dan is P één keer rond geweest, daarna nog een halve cirkel verder en tenslotte nog eens over een afstand van $\frac{2}{3}\pi$ ofwel $\frac{2}{3}$ deel van een halve cirkel, alles met de klok mee. P bevindt zich dan in punt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$, dus $\cos(-3\frac{2}{3}\pi) = \frac{1}{2}$ en $\sin(-3\frac{2}{3}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

5.6 Eigenschappen en formules van de sinus- en cosinus.

In de voorgaande paragrafen is op een meetkundige manier aannemelijk gemaakt [maar niet echt bewezen] dat er functies sinus en cosinus met domein $\mathbb{R}$ bestaan met de hieronder genoemde eigenschappen G1 t/m G4:

5.6.1 *Eigenschappen van de functies cos, sin met domein* $\mathbb{R}$.

G1 $\cos(t-u) = \cos t \cdot \cos u + \sin t \cdot \sin u$.

G2 $\cos\frac{1}{2}\pi = 0$ en $\cos t > 0$, als $0 < t < \frac{1}{2}\pi$.

G3 $\sin(-t) = -\sin t$.

G4 $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$.

Bij de meetkundige motivatie van deze eigenschappen hebben we aangenomen dat de omtrek van de eenheidscirkel gelijk is aan 2π en dat het getal π ook de oppervlakte van de eenheidscirkel voorstelt. Volgens G2 is het getal π het kleinste positieve getal zo dat $\cos\frac{1}{2}\pi = 0$. Dat het hierbij steeds om hetzelfde getal π gaat, moeten we nog bewijzen. De meetkundige motivatie die leidde tot de in 5.6.1 geformuleerde eigenschappen van de sinus, cosinus en het getal π mogen we vanaf nu vergeten. In de volgende paragrafen gaan we bewijzen dat er inderdaad een getal π en functies cosinus en sinus met de eigenschappen G1, G2, G3 en G4 bestaan. In deze paragraaf zullen we eerst onderzoeken welke eigenschappen het getal π en de functies sinus en cosinus uit 5.6.1 nog meer moeten hebben, *verondersteld dat ze bestaan*.

Uit G1 t/m G4 volgt:

(1) $\sin 0 = 0, \cos 0 = 1, \sin\frac{1}{2}\pi = 1$ en $\sin t > 0$, als $0 < t < \frac{1}{2}\pi$,

(2) $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$,

(3) $\cos(-t) = \cos t$,

(4) $\cos(\frac{1}{2}\pi - t) = \sin t$, $\sin(\frac{1}{2}\pi - t) = \cos t$.

Opmerking. Uit (2) blijkt dat het punt $(\cos t, \sin t)$ voor iedere $t \in \mathbb{R}$ op de eenheidscirkel ligt. Er geldt dus $-1 \leq \cos t \leq 1$, $-1 \leq \sin t \leq 1$.

Bewijs. Uit G3 volgt met $t = 0$ dat $\sin(0) = -\sin 0$, dus $\sin(0) = 0$. Uit G4 volgt dat $\sin t$ niet voor iedere $t \in \mathbb{R}$ gelijk aan 0 is. Uit G1 volgt met $t = u = 0$ dat $\cos 0 = \cos^2 0$, dus $\cos 0 = 0$ of $\cos 0 = 1$. Met $t = u$ volgt uit G1 dat $\cos^2 t + \sin^2 t = \cos 0$ voor iedere $t \in \mathbb{R}$, dus $\cos 0 = 0$ kan niet, want dat zou betekenen dat $\cos t = \sin t = 0$ voor iedere $t \in \mathbb{R}$.

Hiermee is aangetoond dat $\cos 0 = 1$ en $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$. Uit $\cos\frac{1}{2}\pi = 0$ en $\cos^2\frac{1}{2}\pi + \sin^2\frac{1}{2}\pi = 1$ volgt $\sin\frac{1}{2}\pi = 1$ of $\sin\frac{1}{2}\pi = -1$. We laten zien dat $\sin\frac{1}{2}\pi = 1$.
Uit G4 volgt namelijk dat er een $r > 0$ is zo dat $\frac{1}{2} < \dfrac{\sin t}{t} < 1\frac{1}{2}$ voor $t \in \langle -r, r\rangle$.
Dan geldt voor $0 < t < r$ dat $\frac{1}{2}t < \sin t < 1\frac{1}{2}t$ en dus $\sin t > 0$.
Als $-r < t < 0$, dat $1\frac{1}{2}t < \sin t < \frac{1}{2}t$ en dus $\sin t < 0$. We nemen hierbij r zodanig dat $0 < r < \frac{1}{2}\pi$. Voor $0 < t < r < \frac{1}{2}\pi$ geldt dan $\cos(\frac{1}{2}\pi - t) > 0, \sin t > 0$ en $\cos(\frac{1}{2}\pi - t) = \cos\frac{1}{2}\pi \cdot \cos t + \sin\frac{1}{2}\pi \cdot \sin t \;= \sin\frac{1}{2}\pi \sin t$, dus $\sin\frac{1}{2}\pi = 1$ en niet $\sin\frac{1}{2}\pi = -1$. Tegelijk is aangetoond dat $\cos(\frac{1}{2}\pi - t) = \sin t$. Vervangen we in de laatste formule t door $\frac{1}{2}\pi - t$, dan krijgen we $\cos t = \sin(\frac{1}{2}\pi - t)$. Hiermee is (4) bewezen.
Dat $\sin t > 0$, als $0 < t < \frac{1}{2}\pi$, volgt uit $\cos(\frac{1}{2}\pi - t) = \sin t$ en G2. Wat betreft (3): uit G1 volgt $\cos(t - u) = \cos(u - t)$. Nemen we hierin $u = 0$, dan krijgen we $\cos t = \cos(-t)$.

(5) *Som en verschilformules.*

$$\cos(t+u) = \cos t \cos u - \sin t \sin u\ ,$$
$$\cos(t-u) = \cos t \cos u + \sin t \sin u\ ,$$
$$\sin(t+u) = \sin t \cos u + \cos t \sin u\ ,$$
$$\sin(t-u) = \sin t \cos u - \cos t \sin u\ .$$

Bewijs. De formule voor $\cos(t-u)$ is G1 en de formule voor $\cos(t+u)$ krijgen we hieruit door u te vervangen door $-u$ en daarna G3 en (3) toe te passen. De formules voor $\sin(t \pm u)$ volgen uit die voor $\cos(t \pm u)$ d.m.v. $\sin t = \cos(\frac{1}{2}\pi - t)$.

Uit (5) volgen direct:

(6) *Formules voor* $2t$.

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t\ ,$$
$$\sin 2t = 2\sin t \cos t\ .$$

(7) *Formules voor* $t \pm \frac{1}{2}\pi$ *en* $t \pm \pi$.

$$\cos(t + \tfrac{1}{2}\pi) = -\sin t, \sin(t + \tfrac{1}{2}\pi) = \cos t\ ,$$
$$\cos(t - \tfrac{1}{2}\pi) = \sin t, \sin(t - \tfrac{1}{2}\pi) = -\cos t\ ,$$
$$\cos(t \pm \pi) = -\cos t, \sin(t \pm \pi) = -\sin t\ .$$

(8) *Cosinus en sinus zijn periodiek met periode* 2π.
Voor $k \in \mathbb{Z}$ geldt: $\cos(t + k\cdot 2\pi) = \cos t, \sin(t + k\cdot 2\pi) = \sin t$.

Opmerking. Uit de formules voor $\cos 2t$ in (6) volgen de formules $\boxed{\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)}$ en $\boxed{\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)}$.

Voorbeeld. $\sin^2 \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}(1-\cos\frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{2}$ en $\sin\frac{1}{4}\pi > 0$ [zie (1)], dus $\sin\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Ook $\cos\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Op deze manier zien we bevestigd wat we uit de meetkunde al wisten.

(9) De cosinus en de sinus zijn differentieerbaar op $\mathbb{R}$. Er geldt $\cos'(t) = -\sin t$ en $\sin'(t) = \cos t$ voor iedere $t \in \mathbb{R}$.

Bewijs. Uit $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin h}{h} = \dfrac{\sin h - \sin 0}{h-0} = 1$ volgt, dat de sinus differentieerbaar is in 0 en dat $\sin'(0) = 1$. De sinus is dus ook continu in 0. Verder geldt $\sin^2(\frac{1}{2}h) = \frac{1}{2}(1-\cos h)$

en dus $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos h - \cos 0}{h-0} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos h - 1}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-\sin^2(\frac{1}{2}h)}{\frac{1}{2}h}$

$$= \lim_{h\to 0}\left(-\sin(\tfrac{1}{2}h)\cdot\frac{\sin(\frac{1}{2}h)}{\frac{1}{2}h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(-\sin(\tfrac{1}{2}h)\right)\cdot\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin(\frac{1}{2}h)}{\frac{1}{2}h}\right) = 0\cdot 1 = 0 .$$

Dat betekent dat ook de cosinus differentieerbaar is in 0 en dat $\cos'(0) = 0$.

Uit $\dfrac{\sin(t+h)-\sin(t)}{h} = \dfrac{(\cos t\cdot\sin h + \cos h\cdot\sin t) - \sin t}{h} = \cos t\cdot\dfrac{\sin h}{h} + \sin t\cdot\dfrac{\cos h - 1}{h}$

volgt nu $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(t+h)-\sin(t)}{h} = \cos t$ ofwel $\sin'(t) = \cos t$. Toon zelf op soortgelijke manier aan dat $\cos'(t) = -\sin t$.

Opmerking. In de volgende paragraaf laten we zien dat er hoogstens één functiepaar cosinus en sinus is met de in (9) genoemde eigenschap.

Gevolg:

(10) De cosinus en sinus zijn continu,
(11) De cosinus is strikt dalend en de sinus is strikt stijgend op het interval $[0,\frac{1}{2}\pi]$

(12) *Formules voor* $\cos t \pm \cos u$ *en* $\sin t \pm \sin u$.
$\cos t + \cos u = 2\cos\frac{1}{2}(t+u)\cos\frac{1}{2}(t-u)$,
$\cos t - \cos u = -2\sin\frac{1}{2}(t+u)\sin\frac{1}{2}(t-u)$,
$\sin t + \sin u = 2\sin\frac{1}{2}(t+u)\cos\frac{1}{2}(t-u)$,
$\sin t - \sin u = 2\cos\frac{1}{2}(t+u)\sin\frac{1}{2}(t-u)$.

Bewijs. Uit $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$ en $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$ volgt door optellen: $\sin(a+b)+\sin(a-b) = 2\sin a\cos b$. Er geldt:

$a+b=t$, $a-b=u \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}(t+u), b = \frac{1}{2}(t-u)$. Etc. Idem voor de rest van (12).

Opgave. Toon met behulp van (12) aan dat
(i) $\cos t = \cos u \Leftrightarrow t = u + k \cdot 2\pi$ of $t = -u + k \cdot 2\pi$ voor zekere $k \in \mathbb{Z}$.
(ii) $\sin t = \sin u \Leftrightarrow t = u + k \cdot 2\pi$ of $t = \pi - u + k \cdot 2\pi$ voor zekere $k \in \mathbb{Z}$.
Ga ook na: $\cos t = \cos u$ èn $\sin t = \sin u \quad \Leftrightarrow \quad t = u \pmod{2\pi}$, m.a.w. de afbeelding $\varphi:\ t \mapsto (\cos t, \sin t)$ is een 1-1 -afbeelding van $[0, 2\pi\rangle$ op de eenheidscirkel.

Voorbeeld. We gaan na dat $\cos\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $\sin\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$.
Er geldt $\cos 3t = \cos(2t + t) \ = \cos 2t \cdot \cos t - \sin 2t \cdot \sin t$
$= (2\cos^2 t - 1)\cdot\cos t - 2\cos t \cdot \sin^2 t$. Vervangen we hierin $\sin^2 t$ door $1 - \cos^2 t$, dan krijgen we $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$. Met $t = \frac{1}{6}\pi$ krijgen we $0 = 4x^3 - 3x$ waarin $x = \cos\frac{1}{6}\pi$. We weten dat $x > 0$, dus $4x^2 - 3 = 0$ ofwel $x = \sqrt{3/4} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Met $y = \sin\frac{1}{6}\pi$ geldt $y > 0$ en $x^2 + y^2 = 1$, dus $y = \frac{1}{2}$. Uit (4) volgt dan
$\cos\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$ en $\sin\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

5.7 Uniekheid van de sinus en de cosinus.
Volgens eigenschap (9) uit 5.6 zijn de sinus en cosinus differentieerbaar en $\sin'(x) = \cos x$, $\cos'(x) = -\sin x$ voor $x \in \mathbb{R}$. Is een functie f differentieerbaar, dan is het mogelijk dat ook de afgeleide f' op zijn beurt weer differentieerbaar is. De afgeleide van de afgeleide van f noemen we de *tweede afgeleide* van f en duiden we met een dubbel accent aan als f''.

Ga na dat zowel de sinus als de cosinus op $\mathbb{R}$ voldoen aan (*) $f'' = -f$. Een functie f met deze eigenschap is oneindig vaak differentieerbaar en op $\mathbb{R}$ geldt $[f^2 + (f')^2]'$ $= 2\cdot f\cdot f' + 2\cdot f'\cdot f'' \ = 2\cdot f\cdot f' - 2\cdot f'\cdot f = 0$. Dus $f^2 + (f')^2$ is een constante functie ofwel $(f(x))^2 + (f'(x))^2 = (f(0))^2 + (f'(0))^2$ voor iedere $x \in \mathbb{R}$. Met $f(x) = \sin x$ geeft dit bijv. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Ga verder na: zijn f en g twee functies die voldoen aan (*), dan geldt dit ook voor $a\cdot f + b\cdot g$ als $a, b \in \mathbb{R}$. I.h.b. voldoen alle functies $x \mapsto a\cdot\cos x + b\cdot\sin x$ met $a, b \in \mathbb{R}$ aan (*). We gaan nu na dat deze functies de enige functies zijn die voldoen aan (*). Stel namelijk dat ook $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ voldoet aan (*) en dat $g(0) = a$ en $g'(0) = b$. Dan voldoet $f(x) = g(x) - (a\cdot\cos x + b\cdot\sin x)$ aan (*) en $f(0) = g(0) - a = a - a = 0$ en ook $f'(0) = g'(0) - (-a\cdot\sin 0 + b\cdot\cos 0) = b - b = 0$. Dus geldt $(f(x))^2 + (f'(x))^2 \ = (f(0))^2 + (f'(0))^2 = 0$ voor iedere $x \in \mathbb{R}$. Dat betekent dat $f(x) = f'(x) = 0$ ofwel $g(x) = a\cdot\cos x + b\cdot\sin x$ voor iedere $x \in \mathbb{R}$.

5.7.1 Voor een minstens tweemaal differentieerbare functie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ geldt:
$f'' = -f$ op $\mathbb{R} \ \Leftrightarrow\ f(x) = f(0)\cdot\cos x + f'(0)\cdot\sin x$ voor iedere $x \in \mathbb{R}$.

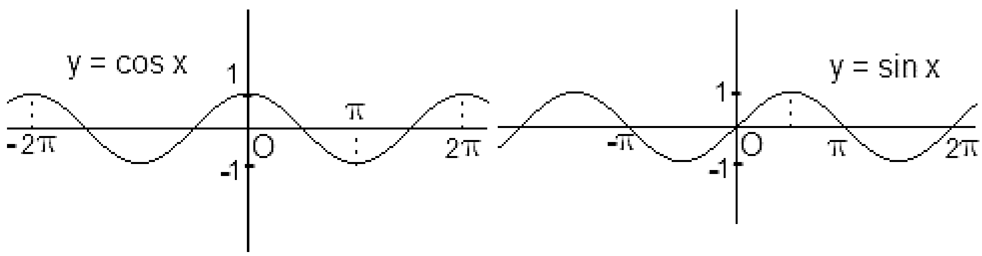
5.7.1 houdt in dat (i) iedere minstens tweemaal differentieerbare functie f zo dat $f'' = -f$ op $\mathbb{R}$, $f(0) = 0$ en $f'(0) = 1$ samenvalt met de sinusfunctie en dat (ii) iedere functie g zo dat $g'' = -g$ op $\mathbb{R}$, $g(0) = 1$ en $g'(0) = 0$ samenvalt met de cosinusfunctie. Door deze eigenschappen worden de sinus en de cosinus eenduidig gekarakteriseerd en alle verdere eigenschappen van de sinus en de cosinus kunnen we hieruit afleiden. Dat betekent overigens niet dat we de sinus en de cosinus simpelweg kunnen definiëren d.m.v. (i) resp. (ii), want het bestaan van functies die voldoen aan (i) en (ii) is d.m.v. bovenstaande stelling alleen gegarandeerd door uit te gaan van het bestaan van de sinus en de cosinus.

Voorbeeld. De somregels voor de sinus en cosinus zijn een onmiddellijk gevolg van bovenstaande stelling. Bekijk $g(x) = \sin(x + p)$. Voor deze functie geldt $g'' = -g$, $g(0) = \sin p$ en $g'(0) = \cos p$, dus $g(x) = \sin p \cdot \cos x + \cos p \cdot \sin x$ voor iedere $x \in \mathbb{R}$. Op dezelfde manier bewijzen we $\cos(x + p) = \cos p \cdot \cos x - \sin p \cdot \sin x$.

Ga na:

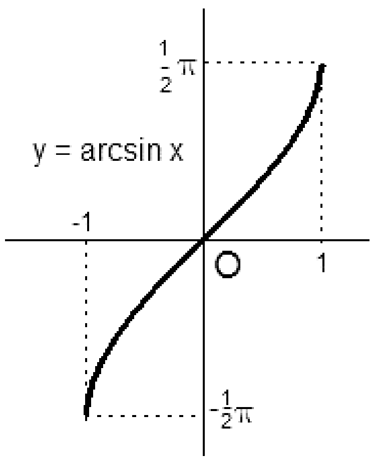
5.7.2 Als $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differentieerbare functies zijn zo dat
(i) $f(0) = 1, g(0) = 0$,
(ii) $f' = -g, g' = f$,
dan $f(x) = \cos x$ en $g(x) = \sin x$, voor iedere $x \in \mathbb{R}$.

Uitgaande van het bestaan van sinus en cosinus beschikken we over genoeg gegevens om de grafieken van deze functies te kunnen tekenen. De waarden van $\cos t$ en $\sin t$ zijn bekend wanneer t een geheel veelvoud van $\frac{1}{4}\pi$ is. Hetzelfde geldt voor de gehele veelvouden van $\frac{1}{6}\pi$. [Zie 5.6] Ga na dat deze grafieken er uit zien als de grafieken hieronder. Het bereik van de functies is $[-1,1]$.



5.8 De arcsinus en arccosinus.

Ga na dat de beperking f van de sinus tot het interval $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ strikt stijgend is. Het bereik van f is $[-1,1]$. Dus f heeft een inverse g met domein $[-1,1]$ en bereik $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$. De grafiek van $g = f^{-1}$ krijgen we door de grafiek van f in de lijn $y = x$ te spiegelen. Functie f heeft een positieve afgeleide op $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$ en $f'(-\frac{1}{2}\pi) = f'(\frac{1}{2}\pi) = 0$. Volgens 3.12.3 betekent dit dat functie g een positieve afgeleide heeft op $\langle -1,1 \rangle$ en niet differentieerbaar in de randpunten -1 en 1 [zie de verticale raaklijnen aan de grafiek].



Functie g is continu op $[-1,1]$ met $g(-1)=-\frac{1}{2}\pi$ en $g(1)=\frac{1}{2}\pi$. Functie g wordt de *arcsinus* genoemd. Voor $x\in[-1,1]$ geldt $\sin(\arcsin x)=x$. Voor $x\in\langle -1,1\rangle$ geeft differentiëren met behulp van de kettingregel $\sin'(\arcsin x)\cdot \arcsin' x=1$ ofwel $\cos(\arcsin x)\cdot\arcsin' x=1$. Met $y=\arcsin x$ geldt $\sin y=x$, $y\in\langle -\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi\rangle$ en $\cos y>0$. Dus voor $x\in\langle -1,1\rangle$

$$\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2} \text{ en } \arcsin' x=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

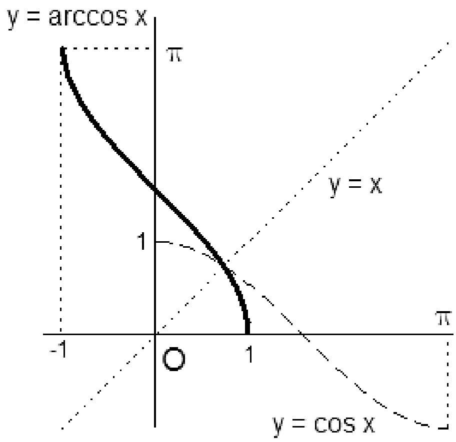
M.a.w. de arcsinus is op $\langle -1,1\rangle$ een primitieve van de continue functie $x\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Verder geldt $\arcsin 0=0$. Dit alles betekent dat $\arcsin x=\int_0^x (1/\sqrt{1-t^2}\mid t\in\langle 1,1\rangle)$ geldt voor iedere $x\in[-1,1]$. Met $x=-1$ of $x=1$ is $\int_0^x (1/\sqrt{1-t^2}\mid t\in\langle 1,1\rangle)$ een oneigenlijke integraal.

Samengevat:

5.8.1 *Arcsinus.* Voor $x\in[-1,1]$ geldt $\arcsin x=\int_0^x (1/\sqrt{1-t^2}\mid t\in\langle 1,1\rangle)$, een oneigenlijke integraal als $x=-1$ of $x=1$. De arcsinus is continu op $[-1,1]$ en continu differentieerbaar op $\langle -1,1\rangle$. Voor $x\in\langle -1,1\rangle$ geldt $\arcsin'(x)=1/\sqrt{1-x^2}$.

Op soortgelijke wijze kunnen we de arccosinus definiëren als de omkeerfunctie g van de functie f, wanneer we voor f de beperking van de cosinus tot het interval $[0,\pi]$ nemen. Functie f is daar differentieerbaar met negatieve afgeleide op $\langle 0,\pi\rangle$ en $f'(0)=f'(\pi)=0$. De omkeerfunctie g is continu op $[-1,1]$ en differentieerbaar met negatieve afgeleide op $\langle -1,1\rangle$. Het bereik van g is $[0,\pi]$.

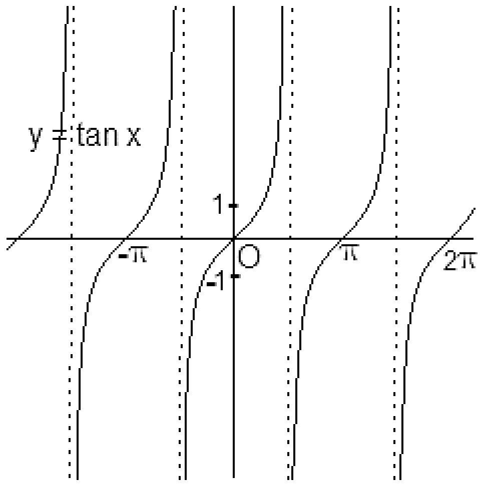


Uit $\cos x=\sin(\frac{1}{2}\pi-x)$ volgt $\arccos x=\frac{1}{2}\pi-\arcsin x$ of wel

$\boxed{\arccos x+\arcsin x=\frac{1}{2}\pi}$. Met deze formule volgen de eigenschappen van de arccosinus onmiddellijk uit die van de arcsinus.

5.8.2 *Arccosinus.* De arccosinus is de omkeerfunctie van de beperking van de cosinus tot het interval $[0,\pi]$. Op $[-1,1]$ geldt $\arccos x = \frac{1}{2}\pi - \arcsin x$. De arccosinus is strikt dalend en continu op zijn domein $[-1,1]$, $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos 0 = \frac{1}{2}\pi$, $\arccos 1 = 0$. Het bereik van arccos is $[0,\pi]$. De arccosinus is continu differentieerbaar op $\langle -1,1\rangle$ en $\arccos'(x) = -1/\sqrt{1-x^2}$ voor $x \in \langle -1,1\rangle$. Voor $x \in [-1,1]$ geldt $\arccos x = \int_x^1 (1/\sqrt{1-t^2} \mid t \in \langle -1,1\rangle)$, een oneigenlijke integraal.

5.9 De tangens. Nog steeds uitgaande van het bestaan van sinus en cosinus definiëren we de tangensfunctie d.m.v. $\tan t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$. De tangensfunctie is in $\ldots, -1\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi, \ldots$. niet gedefinieerd De grafiek heeft daar verticale asymptoten. Het bereik van de tangensfunctie is $\mathbb{R}$. Ga na dat de periode van de tangens gelijk is aan π: er geldt $\tan t = \tan(t + k\cdot\pi)$, als $k \in \mathbb{Z}$. Zie ook de grafiek hiernaast.
Er geldt $\tan 0 = 0$, $\tan\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$, $\tan\frac{1}{3}\pi = \sqrt{3}$. Maak verder gebruik van $\tan(-x) = -\tan x$.



De tangens is differentieerbaar, dus ook continu, op zijn domein.
De quotiëntregel geeft:

5.9.1 $\tan' t = 1 + \tan^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t}$.

De formules voor $\tan t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$ volgen uit de formules voor cosinus en sinus.
We noemen nog:

5.9.2 *Eigenschappen van de tangens.*

(a) $\tan 0 = 0$, $\tan\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$, $\tan\frac{1}{3}\pi = \sqrt{3}$ en $\tan\frac{1}{2}\pi$ bestaat niet.

(b) $\tan(\frac{1}{2}\pi - t) = \dfrac{1}{\tan t}$.

(c) $\tan(-t) = -\tan t$

(d) $\tan(t+u) = \dfrac{\tan t + \tan u}{1 - \tan t \cdot \tan u}$, $\tan(t-u) = \dfrac{\tan t - \tan u}{1 + \tan t \cdot \tan u}$.

(e) $\tan 2t = \dfrac{2\tan t}{1 - \tan^2 t}$.

(f) $\cos 2t = \dfrac{1 - \tan^2 t}{1 + \tan^2 t}$, $\sin 2t = \dfrac{2\tan t}{1 + \tan^2 t}$.

Opgave. De formules in (f) volgen uit $1+\tan^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t}$. Hoe?

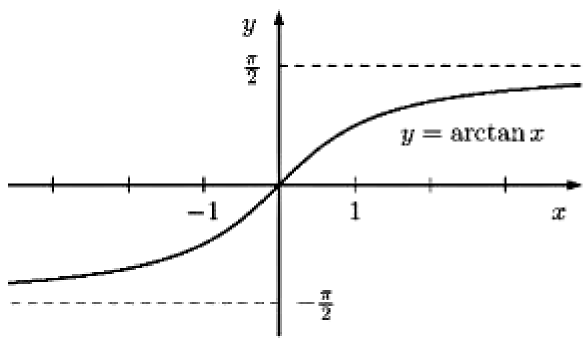
Opgave. Toon aan dat voor $-\frac{1}{2}\pi < t < \frac{1}{2}\pi$ geldt:

$$\cos t = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 t}} \text{ en } \sin t = \frac{\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}}.$$

Geef een meetkundige interpretatie van deze formules voor het geval $0 < t < \frac{1}{2}\pi$. [Teken de eenheidscirkel en daarop punt $P(x,y)$ met $x, y > 0$. Lijn OP snijdt de lijn $x = 1$ in punt R. Q is het punt $Q(x,0)$. Bekijk de driehoeken OQP en OE_1R.]

Voorbeeld. $\sin 0 = 0, \sin' 0 = 1, \tan 0 = 0, \tan' 0 = 1$, dus de lijn k: $y = x$ is de raaklijn in O aan de grafieken van $y = \sin x$ en $y = \tan x$. Voor $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ ligt de tangensgrafiek boven de raaklijn k en de sinusgrafiek ligt onder de raaklijn k. Om dit te bewijzen bekijken we de functies $f(x) = \tan x - x$ en $g(x) = \sin x - x$. Hun afgeleiden zijn $f'(x) = \tan^2 x$ resp. $g'(x) = \cos x - 1$. $f'(x) > 0$ en $g'(x) < 0$ voor $0 < x < \frac{1}{2}\pi$, dus f is daar stijgend en g is daar dalend, $f(0) = g(0) = 0$, dus $f(x) > 0$ en $g(x) < 0$ op $\langle 0, \frac{1}{2}\pi\rangle$ ofwel $\sin x < x < \tan x$.

5.10 Arctangens. Op het interval $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$ is de tangensfunctie strikt stijgend, dus omkeerbaar. De beperking van de tangens tot het interval $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$ heeft dus een omkeerfunctie, de *arctangens*. De tangens is differentieerbaar, dus continu, met positieve afgeleide en dat geldt dan ook voor de arctangens. Het domein van de arctangens is $\mathbb{R}$ en bereik is $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$.



Er geldt $\lim\limits_{x\to -\infty} \arctan x = -\frac{1}{2}\pi$ en $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x = \frac{1}{2}\pi$.

De grafiek de arctangens heeft twee horizontale asymptoten, de lijnen $y = \frac{1}{2}\pi$ en $y = -\frac{1}{2}\pi$. De raaklijn in O aan de grafiek is de lijn $y = x$. Zie de grafiek.

Uit $\tan(\arctan x) = x$ volgt met de kettingregel $\tan'(\arctan x)\cdot \arctan'(x) = 1$ voor $x \in \mathbb{R}$. Dus $\arctan'(x) = \dfrac{1}{\tan'(\arctan x)} = \dfrac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \dfrac{1}{1+x^2}$. Anders gezegd: de arctangens is een primitieve van $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ op $\mathbb{R}$ en f is daar continu, dus integreerbaar. Verder geldt $\arctan 0 = 0$. Dat betekent dat $\int_0^x (1/(1+t^2) \mid t \in \mathbb{R}) = \arctan x$.

Samengevat:

5.10.1 De arctangens is de omkeerfunctie van $(\tan x \mid x \in \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle)$. Het domein van de arctangens is $\mathbb{R}$ en het bereik is $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$. De arctangens is differentieerbaar en $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ voor $x \in \mathbb{R}$. De arctangens is strikt stijgend op $\mathbb{R}$. Er geldt $\arctan x = \int_0^x (1/(1+t^2) \mid t \in \mathbb{R})$

Voorbeeld. De arctangens geeft ons nieuwe voorbeelden van een oneigenlijke integralen, ga na dat bijv. $\int_0^{\infty} (1/(1+t^2) \mid t \in \mathbb{R}) = \frac{1}{2}\pi$ en $\int_{-\infty}^{\infty} (1/(1+t^2) \mid t \in \mathbb{R}) = \pi$.

Opmerking. De *cotangensfunctie* $x \mapsto \cot x$ wordt gedefinieerd door $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ voor $x \in \mathbb{R}$ zo dat $\sin x \neq 0$. Er geldt $\cot x = \tan(\frac{1}{2}\pi - x)$. Ga na dat

$$[\cot x]' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -(1+\cot^2 x) \text{ voor } x \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

De beperking van de cotangens tot het interval $\langle 0, \pi\rangle$ is omkeerbaar en de omkeerfunctie is de *arccotangens*. Er geldt $y = \cot x \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} y$ voor $x \in \langle 0, \pi\rangle$ en en $y \in \mathbb{R}$. Uit $\operatorname{arccot}(\cot x) = x$ volgt $[\operatorname{arccot}(\cot x)]' = \operatorname{arccot}'(\cot x) \cdot \cot' x = 1$. Dus voor $y \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{arccot}'(\cot x) = \frac{1}{\cot' x} = \frac{-1}{1+\cot^2 x} \text{ ofwel } \boxed{[\operatorname{arccot} y]' = \frac{-1}{1+y^2}}.$$

Ga na dat $[\arctan x + \operatorname{arccot} x]' = 0$. Daaruit volgt $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \text{constant}$ voor $x \in \mathbb{R}$. Invullen van $x = 0$ geeft voor $x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\arctan x + \operatorname{arccot} x = \tfrac{1}{2}\pi}.$$

Opgave. Stel $y = \tan t$ met $t \in \left\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \right\rangle$ ofwel $t = \arctan y$. Ga na dat $\sin(\arctan y) = y / \sqrt{1+y^2}$ en $\cos(\arctan y) = 1/\sqrt{1+y^2}$ voor $y \in \mathbb{R}$.

Opgave. Stel $X(x, y)$ is een punt dat boven de x-as ligt. Bekijk de ruit *OPQX* met $P(\sqrt{x^2+y^2}, 0)$ op de x-as en $Q = (x + \sqrt{x^2+y^2}, y)$. De zijden van de ruit hebben de lengte $\sqrt{x^2+y^2}$ en *OQ* is de bissectrice van $\angle POX$. Is t het argument van Q tussen 0 en $\frac{1}{2}\pi$, dan is $2t$ het argument van X tussen 0 en π. Ga na dat $\tan t = \dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$ en dus $2t = 2 \cdot \arctan \dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$.

Algemener geldt dat bij een punt $X \neq O$, dat niet op het negatieve deel van de x-as ligt, de formule $2 \cdot \arctan \dfrac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$ het argument van X levert dat tussen $-\pi$ en π ligt. Toon dit aan.

5.11 Het bestaan van de sinus, cosinus en tangens. We zijn nu in staat om te bewijzen dat er inderdaad functies bestaan met de eigenschappen van sinus, cosinus en tangens zonder dat we een beroep hoeven te doen op de meetkunde. We kunnen bijv. uitgaan van de arctangens. Deze functie is op $\mathbb{R}$ gedefinieerd als de primitieve van de functie $t \mapsto 1/(1+t^2)$ die in 0 de waarde 0 heeft. Het bestaan van zo'n primitieve is gegarandeerd. Er geldt $\arctan x = \int_0^x \left(\dfrac{1}{1+t^2} \mid t \in \mathbb{R} \right)$ voor $x \in \mathbb{R}$.

Het getal π kunnen we definiëren door $\frac{1}{2}\pi = \lim\limits_{x \to \infty} \arctan x$. Eerder hebben we π gedefinieerd als het getal dat de oppervlakte van de eenheidscirkel voorstelt. Ook hebben we gesteld dat 2π de omtrek van de eenheidscirkel is. We moeten natuurlijk aantonen dat het in al deze gevallen om hetzelfde getal π gaat.

De tangens, voorlopig beperkt tot het interval $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$, kunnen we definiëren als de inverse van de arctangens. Voor $x \in \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$ definiëren we $\cos x$ en $\cos x$ d.m.v. $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$ resp. $\sin x = \dfrac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$ [zie de opgaven na 5.7.2].

Voor $x \in \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$ geldt $\cos x > 0$. Ga na dat $\lim\limits_{x \uparrow \frac{1}{2}\pi} \cos x = \lim\limits_{x \downarrow -\frac{1}{2}\pi} \cos x = 0$,

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ voor $x \in \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$ en dus $\lim\limits_{x \uparrow \frac{1}{2}\pi} \sin x = 1$, $\lim\limits_{x \downarrow -\frac{1}{2}\pi} \sin x = -1$.

Het is nu eenvoudig om deze cosinus en sinus uit te breiden tot functies die differentieerbaar zijn op heel $\mathbb{R}$. We stellen daartoe $\cos(-\frac{1}{2}\pi) = \cos(\frac{1}{2}\pi) = 0$, $\sin(-\frac{1}{2}\pi) = -1$ en $\sin(\frac{1}{2}\pi) = 1$. Verder $\cos(x + \pi) = -\cos x$ en $\sin(x + \pi) = -\sin x$. We moeten nagaan dat $\cos' x = -\sin x$ en $\sin' x = \cos x$ voor $x \in \mathbb{R}$. In combinatie met 5.7.2 is dan aangetoond:

5.11.1 Er bestaat precies één paar differentieerbare functies $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zo dat

(i) $f(0) = 1, g(0) = 0$,

(ii) $f' = -g, g' = f$,

en dat zijn de op bovenstaande wijze gedefinieerde functies $f : x \mapsto \cos x$ en $g : x \mapsto \sin x$ met domein $\mathbb{R}$.

We laten de details van het bewijs als opgave aan de lezer over.

Ga na dat deze cosinus en sinus de in 5.6.1 genoemde eigenschappen G1 t/m G4 hebben en dus ook alle daaruit afgeleide eigenschappen.

5.12 Nog een andere karakterisering van de sinus en de cosinus.
We weten dat de sinus en cosinus functies zijn met domein $\mathbb{R}$ zo dat
$\cos(x-y)=\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y$, $\sin(x-y)=\sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y$ en

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Omgekeerd geldt:

5.12.1 *Kenmerkende eigenschappen van de sinus en cosinus.*
Als f en g functies zijn met domein $\mathbb{R}$ zo dat

A1 $f(x-y)=f(x)\cdot f(y)+g(x)\cdot g(y)$,

A2 $g(x-y)=g(x)\cdot f(y)-f(x)\cdot g(y)$ en

A3 $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=1$,

dan is f de cosinus en g is de sinus.

Bewijs. Stel f en g hebben de genoemde eigenschappen. Voor de betere leesbaarheid schrijven we $\operatorname{Cos}x$ en $\operatorname{Sin}x$ i.p.v. $f(x)$ resp. $g(x)$. We maken gebruik van 5.7.2. We moeten dus aantonen dat $\operatorname{Sin}(0)=0$, $\operatorname{Cos}0=1$ en $\operatorname{Cos}'=-\operatorname{Sin},\operatorname{Sin}'=\operatorname{Cos}$.
Eigenschappen van Cos en Sin zijn:

(a) $\operatorname{Sin}(0)=0$, $\operatorname{Cos}0=1$.

(b) $\operatorname{Cos}^2 x+\operatorname{Sin}^2 x=1$, dus punt $(\operatorname{Cos}(x),\operatorname{Sin}(x))$ ligt op de eenheidscirkel en
$-1\le\operatorname{Cos}x\le 1,-1\le\operatorname{Sin}x\le 1$.

[Neem $y=x$ in A2. Dat geeft $\operatorname{Sin}(0)=0$. Neem $x=y$ in A1. Dat geeft $\operatorname{Cos}0=\operatorname{Cos}^2 x+\operatorname{Sin}^2 x$ en met $x=0$ krijgen we dan $\operatorname{Cos}0=\operatorname{Cos}^2 0$. Dit laatste betekent dat $\operatorname{Cos}0=0$ of $\operatorname{Cos}0=1$. $\operatorname{Cos}0=0$ kan niet, want dan $\operatorname{Cos}^2 x+\operatorname{Sin}^2 x=0$ ofwel $\operatorname{Cos}x=\operatorname{Sin}x=0$ voor iedere $x\in\mathbb{R}$. Maar dat is in strijd met A3.]

(c) $\operatorname{Cos}(-x)=\operatorname{Cos}x$ en $\operatorname{Sin}(-x)=-\operatorname{Sin}(x)$.

[Neem $x=0$ in A1 en A2 en gebruik (a).]

(d) $\operatorname{Cos}(x+y)=\operatorname{Cos}x\cdot\operatorname{Cos}y-\operatorname{Sin}x\cdot\operatorname{Sin}y$,
$\operatorname{Sin}(x+y)=\operatorname{Sin}x\cdot\operatorname{Cos}y+\operatorname{Cos}x\cdot\operatorname{Sin}y$.

[Volgt uit A1 en A2 met behulp van (c).]

(e) $\operatorname{Cos}2x=\operatorname{Cos}^2 x-\operatorname{Sin}^2 x=2\cdot\operatorname{Cos}^2 x-1=1-2\cdot\operatorname{Sin}^2 x$

[Volgt uit (d)] en dus ook $\operatorname{Sin}^2(\tfrac{1}{2}h)=\tfrac{1}{2}(1-\operatorname{Cos}h)$.

(f) Cos en Sin zijn differentieerbaar en $\operatorname{Cos}'=-\operatorname{Sin}$, $\operatorname{Sin}'=\operatorname{Cos}$

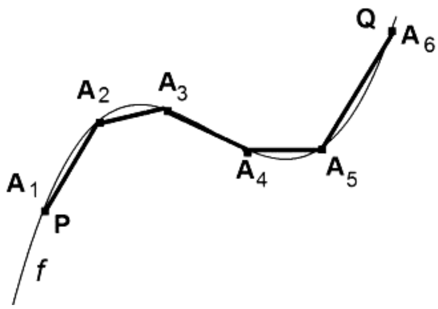
[Zie het bewijs van (9) in 5.6.]

Met 5.7.2 krijgen we tenslotte $f=\operatorname{Cos}=\cos$ en $g=\operatorname{Sin}=\sin$.

5.13 De lengte van een grafiekboog. Om aan te tonen dat het getal π in de beweringen $\lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{1}{2}\pi$, oppervlakte eenheidscirkel $=\pi$ en omtrek eenheidscirkel $=2\pi$ steeds hetzelfde getal is, gaan we eerst na hoe we de lengte van een cirkelboog kunnen definiëren en berekenen. We weten inmiddels al dat het getal π voldoet aan G2 uit 5.6.1 [zie 5.11].

We zien hiernaast de grafiek van een functie f. De lengte van het deel van de grafiek van f tussen de punten P en Q wordt benaderd door de som l van de lengten van de 5 getekende lijnstukken:

$$l = A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + A_4A_5 + A_5A_6.$$



Heeft f geen al te wild verloop, dan geeft l een redelijke benadering van de lengte van het bedoelde grafiekdeel. Om een betere benadering te krijgen kunnen we het aantal deelpunten A_i groter maken, waarbij we er tegelijk voor moeten zorgen dat de maximale lengte van de lijnstukken A_iA_{i+1} korter wordt. Door het toevoegen van een extra deelpunt neem de som l toe (niet noodzakelijk strikt). [Denk aan de driehoeksongelijkheid: een zijde van een driehoek is korter dan de som van de beide andere zijden. De driehoeksongelijkheid is meetkundig evident en ook algebraïsch eenvoudig te bewijzen, zie het volgende hoofdstuk.]

Hebben de sommen $l = A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n$ een bovengrens, dan hebben zij een kleinste bovengrens λ en in dat geval noemen we λ de *booglengte* van het deel van de grafiek tussen P en Q. Is zo'n bovengrens er niet, dan is de lengte van grafiekboog PQ niet gedefinieerd. Opdat de lengte van boog PQ gedefinieerd is moet functie f aan bepaalde eisen voldoen. We veronderstellen hierbij stilzwijgend dat de functie f in ieder geval continu is. Voor niet-continue functies heeft het begrip booglengte niet zoveel zin. We zullen hieronder zien dat in ieder geval monotonie het bestaan van de booglengte garandeert. [NB Continuïteit alleen is niet voldoende.] Voor monotone functies en ook voor functies die uit een eindig aantal monotone stukken bestaan is het begrip 'booglengte' hiermee wiskundig gedefinieerd. Een grafiekdeel PQ waaraan we op bovengenoemde manier een lengte λ kunnen toekennen, heet *rectificeerbaar*. ['Rectificeren' betekent hier 'rechtmaken', denk aan het rechttrekken van een touwtje.]

Stel $f : I \to \mathbb{R}$ is een continue functie waarvan het domein I een interval is. Een getal uit I stellen we hier voor door een kleine letter en het bijbehorende punt op de grafiek van f stellen we voor door de corresponderende hoofdletter, bij $x \in I$ hoort punt $X(x, f(x))$ op de grafiek en omgekeerd.

We benaderen de lengte van een boog AB met behulp van sommen

$$l = \sum_{i=1}^{n} X_{i-1}X_i = X_0X_1 + X_1X_2 + \cdots + X_{n-1}X_n \text{ met } a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\,.$$

Voor $i = 1,\ldots,n$ stelt $X_{i-1}X_i$ de lengte van het lijnstuk $X_{i-1}X_i$ voor.

Laat verzameling $L(a,b)$ alle mogelijke sommen $l = X_0X_1 + X_1X_2 + \cdots + X_{n-1}X_n$ met $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ bevatten. Dat $L(a,b)$ niet leeg is, mag duidelijk zijn, maar $L(a,b)$ hoeft, zonder dat we nadere eisen aan de functie f stellen. niet naar boven begrensd te zijn. Is dat wel het geval dan is $\lambda = \sup L(a,b)$ per definitie de lengte van het deel van de grafiek van f tussen de punten $A(a, f(a))$ en $B(b, f(b))$.

………………………………………………………..