

Voorwoord bij de herziene en uitgebreide editie.

Dit boek behandelt de belangrijkste begrippen en methoden uit de analyse van 'functies van één variabele' en de analytische vlakke meetkunde als een samenhangend geheel. Begrippen en methoden, waarmee we op school op min of meer intuïtieve wijze kennis hebben gemaakt, worden in dit boek op een wiskundig verantwoorde manier opnieuw onder de loep genomen. De focus is hier meer op de theoretische structuur van genoemde wiskundegebieden gericht dan op praktisch rekenwerk en concrete toepassingen. Elementaire rekenvaardigheid m.b.t. algebraïsche formules, exponentiële, logaritmische en goniometrische functies, differentiëren en integreren en enige kennis van de schoolmeetkunde wordt bekend verondersteld. Hoofdstuk 1 geeft een korte samenvatting van de begrippen en notaties die niet tot de schoolstof behoren, maar die wel nodig zijn voor een goed begrip van de volgende hoofdstukken. Bij de namen van bekende wiskundigen, die in het boek genoemd genoemd worden, geven we geen biografische informatie, die is via het internet eenvoudig te vinden. We richten ons tot lezers die plezier beleven aan wiskunde en zich niet laten afschrikken, wanneer het af en toe wat moeilijker wordt. Als voorkennis is in principe wiskunde B op vwo-niveau voldoende.

Het betreft hier een herziene en uitgebreide editie van de eerste uitgave uit 2011.

Maart 2019,

Rinse Poortinga

Analyse + Meetkunde

Inhoud

1	Basisbegrippen	1
1.1	Verzamelingen.	1
1.2	Geordende paren.	4
1.3	Functies, afbeeldingen.	5
1.4	Indexnotatie, rijen.	8
1.5	De lege verzameling nader bekeken.	12
1.6	Bewerkingen.	13
1.7	Groep.	15
1.8	Direct product.	16
1.9	Structuurbehoudende afbeeldingen.	16
1.10	Ondergroep.	17
1.11	Een intern direct product.	19
1.12	De kern van een groepshomomorfie.	20
1.13	De natuurlijke getallen.	21
1.14	Decimale schrijfwijze.	24
1.15	Gehele veelvouden.	26
1.16	Grootste gemene deler.	28
1.17	Priemgetallen.	30
1.18	Aftelbare verzamelingen.	31
1.19	Equivalentierelaties.	32
1.20	Ordening.	35
1.21	Lichamen.	37
1.22	Complexe getallen.	42
2	De getallenlijn en andere lineaire ruimten.....	44
2.1	Archimedische ordening.	45
2.2	Intervallennest.	48
2.3	Het bestaan van wortels.	51
2.4	Kleinste bovengrens en grootste ondergrens.	54
2.5	Geordende lichamen.	59
2.6	Limieten van rijen reële getallen.	62
2.7	Lineaire ruimten.	66
2.8	De translaties van een lineaire ruimte.	71
2.9	Affiene deelruimten.	74
2.10	Transformatiegroepen.	76
2.11	Afstand, inwendig product en loodrechte stand.	77
2.12	Exponentiële en logaritmische functies.	79

3	Limieten, continuïteit en afgeleide	83
3.1	Monotone functies.	83
3.2	Intervallen, open en gesloten verzamelingen.	84
3.3	Monotone functies en continuïteit.	90
3.4	Continuïteit.	93
3.5	De limiet van een functie in een verdichtingspunt van zijn domein.	98
3.6	De afgeleide.	101
3.7	Extreme waarden.	105
3.8	Stelling van Rolle, middelwaardestelling.	106
3.9	Stijgen en dalen.	107
3.10	Productregel, quotiëntregel en kettingregel.	108
3.11	Plus en min oneindig.	112
3.12	Lipschitzcontinuïteit en uniforme continuïteit.	114
3.13	Het convergentiekenmerk van Cauchy.	116
3.14	Differentieerbaarheid van de exponentiële en logaritmische functies.	117
3.15	Alternatieve definities van de exponentiële en logaritmische functies.	122
4	Integralen	127
4.1	Middelwaardestelling en oppervlakte.	127
4.2	Primitieve.	129
4.3	Oppervlakte onder de grafiek van een functie.	130
4.4	Integraalfunctie.	134
4.5	Stamfunctie.	138
4.6	Integreerbaarheid.	141
4.7	Primitieven en stamfuncties.	145
4.8	Het integraalteken.	147
4.9	De natuurlijke logaritme.	150
4.10	Exponentiële functies.	153
4.11	Logaritmische functies.	156
4.12	Machtsfuncties.	158
4.13	Enkele belangrijke limieten.	159
4.14	Oneigenlijke integralen.	161
5	De eenheidscirkel en goniometrie	163
5.1	Sinus, cosinus en tangens.	163
5.2	Cosinusregel, sinusregel en oppervlakteformule.	164
5.3	De symmetrieën van de eenheidscirkel.	165
5.4	Radialen.	166
5.5	Cosinus en sinus als functies met domein \mathbb{R} .	167

5.6	Eigenschappen en formules van de sinus en cosinus.	169
5.7	Uniekheid van de sinus en de cosinus.	173
5.8	De arcsinus en arccosinus.	174
5.9	De tangens.	176
5.10	Arctangens.	178
5.11	Het bestaan van de sinus, cosinus en tangens.	180
5.12	Nog een andere karakterisering van de sinus en de cosinus.	181
5.13	De lengte van een grafiekboog.	182
5.14	Booglengte bij monotone functies.	185
5.15	Andere eigenschappen die rectificeerbaarheid garanderen.	186
5.16	De cyclometrische functies.	188
5.17	π als oppervlakte van de eenheidscirkel.	190
5.18	Argument en modulus van een punt.	191
5.19	Rotaties om O en georiënteerde hoeken.	192
5.20	Spiegelen t.o.v. een lijn door O .	195
5.21	Complexe getallen en poolcoördinaten.	196

6 Meetkunde in \mathbb{R}^2198

6.1	\mathbb{R}^2 als lineaire ruimte.	198
6.2	Lijnen in \mathbb{R}^2 .	198
6.3	Translaties.	202
6.4	De parametervoorstelling van een lijn.	203
6.5	Beschrijving van een lijn d.m.v. determinant of inproduct.	206
6.6	Het complex product en georiënteerde hoeken.	207
6.7	Spiegelen t.o.v. de x-as.	210
6.8	De draaivermenigvuldiging.	211
6.9	Eigenschappen van inproduct en determinant.	212
6.10	Oriëntatie en hoofdwaarde van georiënteerde hoeken.	214
6.11	Niet-georiënteerde hoeken.	215
6.12	Cosinusregel en sinusregel.	219
6.13	De hoek tussen twee lijnen.	221
6.14	Verhoudingen van evenwijdige translaties en pijlen.	223
6.15	De afstand van een punt tot een lijn, de afstand van twee evenwijdige lijnen.	228
6.16	Halfvlakken.	229
6.17	F-hoeken en Z-hoeken.	231
6.18	Oppervlakte van driehoeken en parallellogrammen.	233
6.19	Lineaire en affiene transformaties van \mathbb{R}^2 .	236
6.20	Gelijkvormigheden en congruenties.	243
6.21	Gelijkvormige driehoeken.	246

7 Cirkels, driehoeken en meer in \mathbb{R}^2248

- 7.1 Cirkels en omtrekshoeken. 248
- 7.2 Bissectrice. 252
- 7.3 Oppervlaktecoördinaten. 254
- 7.4 De stellingen van Ceva en Menelaus. 258
- 7.5 Congruente driehoeken. 262
- 7.6 Gelijkvormige driehoeken. 264
- 7.7 Congruenties. 268
- 7.8 Vermenigvuldigen t.o.v. een punt. 274
- 7.9 Iedere congruentie is het product van hooguit 3 spiegelingen. 275
- 7.10 Ellipsen, hyperbolen en parabolen. 276
- 7.11 De macht van een punt t.o.v. een cirkel. 283
- 7.12 Inversie t.o.v. een cirkel. 285
- 7.13 Harmonisch scheiden. 289
- 7.14 Stereografische projectie. 290
- 7.15 Centrale projectie. 292
- 7.16 Möbiustransformaties 297

8 Primitieven en Riemansommen 305

- 8.1 Differentiëren. 305
- 8.2 Primitiveren. 311
- 8.3 Substitutieregel. 314
- 8.4 Partiële integratie. 318
- 8.5 Oppervlakte. 323
- 8.6 Riemansommen. 324

9 Hogere afgeleiden332

- 9.1 De beste lokale affiene benadering van een functie. 332
- 9.2 Het o-symbool van Landau. 334
- 9.3 Hogere afgeleiden. 335
- 9.4 Een uitbreiding van de middelwaardestelling. 336
- 9.5 De regel van l'Hospital. 337
- 9.6 Lokale benadering door Taylorpolynomen. 340
- 9.7 De stelling van Taylor. 345
- 9.8 Taylorpolynoom $T_{a,n}(x)$ bij vaste x en toenemende n . 347
- 9.9 De restterm in integraalvorm. 354
- 9.10 Convex en concaaf. 357
- 9.11 Uniforme convergentie. 358

10 Krommen	368
10.1	Krommen in \mathbb{R}^2 . 368
10.2	Differentieerbaarheid en raaklijnen. 374
10.3	De lengte van een kromme. 381
10.4	Poolcoördinaten. 386
10.5	Windingsgetal. 392
10.6	De lengte van een kromme in poolcoördinaten. 394
10.7	De kromming van een kromme. 396
10.8	De omhullende van een stelsel lijnen. 401
11 Oppervlakte en complexe afgeleide	407
11.1	Vlakdelen. 407
11.2	De oppervlakte van een cirkelsector. 415
11.3	Oppervlakte en intervalsonnen. 427
11.4	Limieten in \mathbb{R}^n . 432
11.5	Partiële afgeleiden. 436
11.6	Differentieerbaarheid van \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^m -afbeeldingen. 437
11.7	De complexe afgeleide. 440
11.8	Complexe vs. reële differentieerbaarheid. 444
11.9	Enkele elementaire \mathbb{C} - \mathbb{C} -afbeeldingen. 445
11.10	Complexe polynoomafbeeldingen 449
11.11	Taylorpolynomen. 453
11.12	Lokaal gedrag van holomorfe afbeeldingen. 456
Literatuur	459
Trefwoorden	461